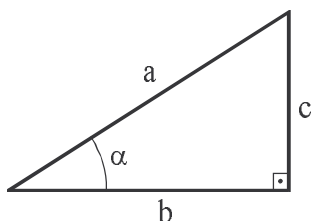


**1ª Série de Exercícios**

**RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**



$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{a} \quad \text{cos } \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{tan } \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} \quad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \quad \text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad \text{cotan } \alpha = \frac{1}{\text{tan } \alpha}$$

**ÂNGULOS NOTÁVEIS**

graus	radianos	seno	coseno	tangente
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\infty$

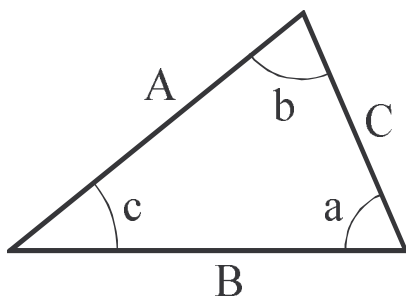
**RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\text{cos}(\alpha) \quad \text{cos}(2\alpha) = \text{cos}^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha) \quad \text{tan}(2\alpha) = \frac{2 \text{tan}(\alpha)}{1 - \text{tan}^2(\alpha)}$$

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen}A\text{cos}B + \text{sen}B\text{cos}A \quad \text{cos}(A+B) = \text{cos}A\text{cos}B - \text{sen}A\text{sen}B$$

**RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS**

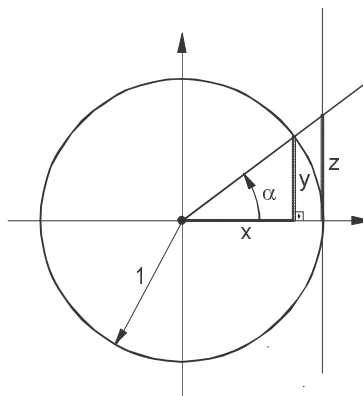


$$A^2 = B^2 + C^2 - 2.B.C.\text{cos}(a) \quad (\text{lei dos cossenos})$$

$$\frac{A}{\text{sen}(a)} = \frac{B}{\text{sen}(B)} = \frac{C}{\text{sen}(c)} \quad (\text{lei dos senos})$$

$$S = \frac{1}{2} A.B.\text{sen}(c) \quad (\text{cálculo da área})$$

## CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



$$y = \text{sen}(\alpha)$$

$$x = \text{cos}(\alpha)$$

$$z = \text{tan}(\alpha)$$

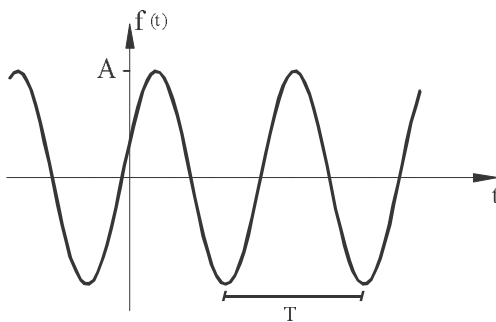
$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha) \quad \text{cos}(-\alpha) = \text{cos}(\alpha) \quad \text{tan}(-\alpha) = -\text{tan}(\alpha)$$

## PROPRIEDADES

$$\text{sen}(\alpha \pm \pi) = -\text{sen}(\alpha) \quad \text{cos}(\alpha \pm \pi) = -\text{cos}(\alpha) \quad \text{tan}(\alpha \pm \pi) = \text{tan}(\alpha)$$

$$\text{sen}(\alpha) = \text{cos}(\alpha - 90^\circ)$$

## FORMA GERAL



$$f(t) = A \text{cos}(\omega t + \phi)$$

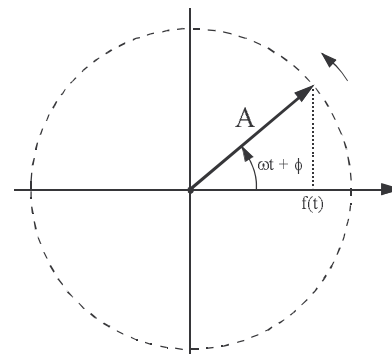
A = amplitude

$\omega$  = frequência angular

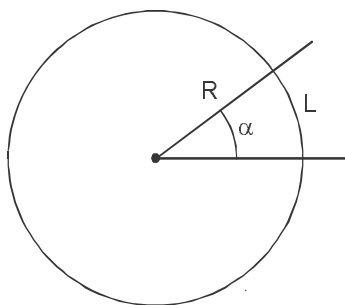
$\phi$  = fase

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Se interpretarmos a variável t como sendo o tempo, a senóide pode ser visualizada como a projeção de um vetor girante:



## A UNIDADE NATURAL DE ÂNGULOS



A medida do ângulo  $\alpha$  é definida como a razão entre o comprimento do arco subentendido pelo ângulo e o raio de uma circunferência com vértice no ângulo:

$$\alpha = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{raio}} = \frac{L}{R}$$

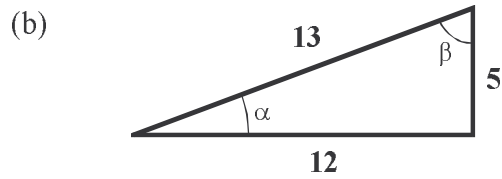
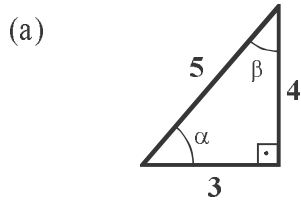
Costumamos chamar essa razão de *radiano*, mas na verdade é um número puro.

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

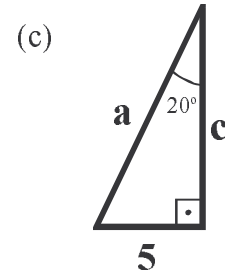
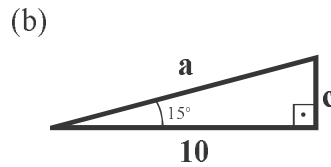
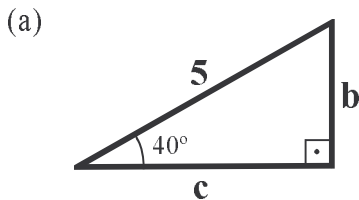
As funções trigonométricas simples  $\text{sen}(x)$  e  $\text{cos}(x)$  tem amplitude 1 e período  $2\pi$ .

## EXERCÍCIOS

**Exercício 1:** Encontre os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , em graus e minutos:



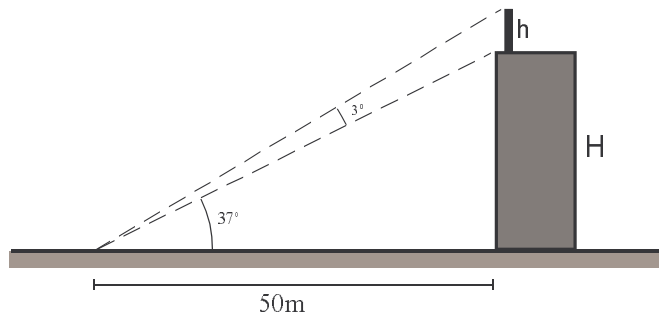
**Exercício 2:** Calcule o comprimento dos lados desconhecidos, com três significativos:



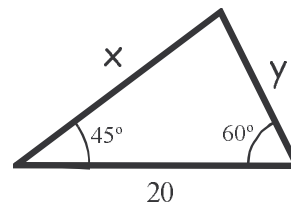
**Exercício 3:** (a) A inclinação de uma ladeira é  $12^{\circ}17'$ . Expresse essa inclinação em metros por quilômetro (m/km), com três significativos.

(b) Qual a inclinação de uma encosta, em graus e minutos, de declividade 450m/km ?

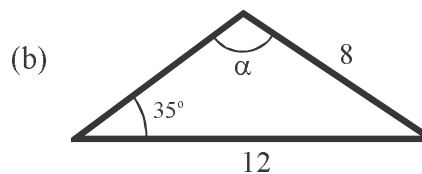
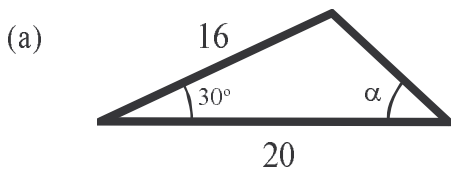
**Exercício 4:** Um observador no solo, a 50m do pé de um edifício, vê o prédio sob ângulo de  $37^{\circ}$ , e uma torre com antena no topo do prédio sob ângulo de  $3^{\circ}$ . Calcule as alturas do prédio e da torre. (3 significativos)



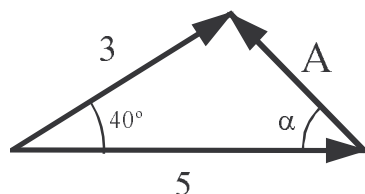
**Exercício 5:** Encontre os lados desconhecidos (3 significativos) :



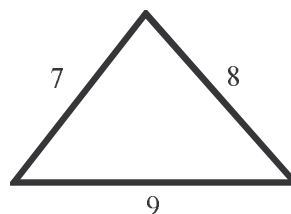
**Exercício 6:** Encontre o lado desconhecido (3 significativos) e o ângulo  $\alpha$  (graus e minutos) :



**Exercício 7:** Calcule o tamanho do vetor  $\vec{A}$  (3 significativos) e o ângulo  $\alpha$  (graus e minutos) :



**Exercício 8:** Calcule os três ângulos do triângulo (*graus e minutos*) :

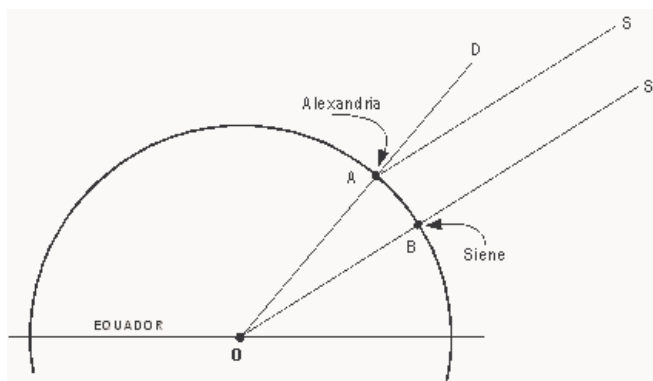


**Exercício 9:** A quantos graus corresponde 1 radiano ?

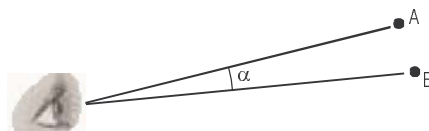
A quantos radianos corresponde  $1^\circ$  ?

**Exercício 10:** (M. Kline, "Mathematics and the Physical World", Dover, 1981)

Eratóstenes (275-194 AC) foi um famoso erudito, poeta, historiador, astrônomo, geógrafo e matemático, que viveu durante os últimos períodos da civilização grega antiga, quando o centro dessa cultura estava em Alexandria, no Egito. Assim como a maioria dos gregos mais informados, ele sabia que a Terra era esférica, e então preparou um experimento para encontrar seu perímetro. Ele sabia que Alexandria estava ao norte da cidade de Siene, e que a distância medida entre essas duas cidades, sobre a superfície da Terra, era de quinhentas milhas. No solstício de verão, o Sol do meio-dia brilhava diretamente sobre um poço, em Siene. Isso significa, como Eratóstenes observou, que o Sol estava verticalmente acima nesse instante (direção OBS' na figura). Já em Alexandria, nesse mesmo instante a direção do Sol era AS, enquanto que a direção vertical é OAD. Mas o Sol está tão longe que as direções AS e BS' são paralelas. Eratóstenes mediu o ângulo DAS (como você faria isso?) e encontrou sete graus e meio. Qual o valor do raio da Terra, de acordo com essa medição? (*uma milha corresponde a 1.610 metros*)

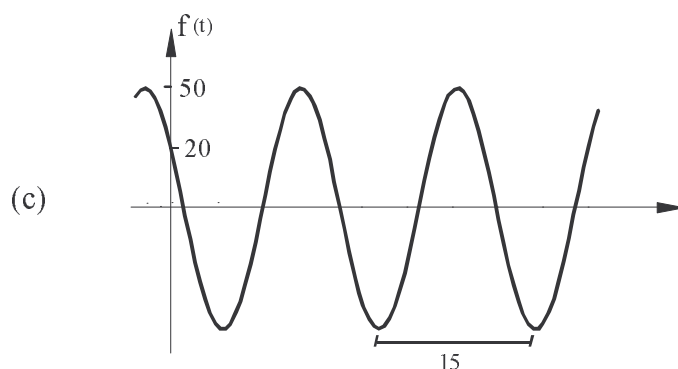
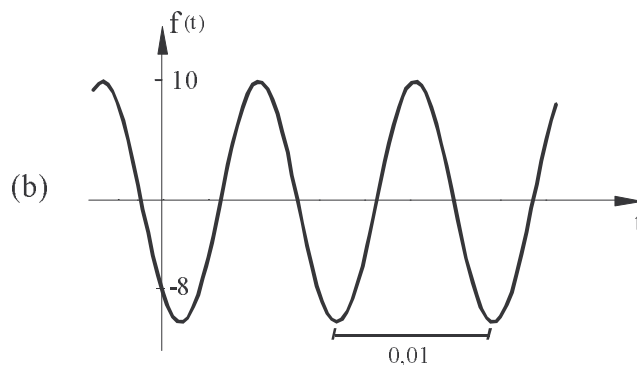
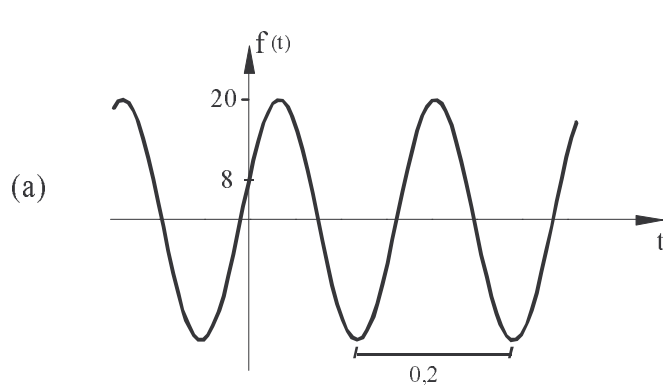


**Exercício 11:** O menor ângulo visual sob o qual o olho humano vê dois pontos A e B separadamente é chamado de acuidade visual, e é, em média, da ordem de um minuto de grau.



- (a) Uma pessoa normalmente consegue focar bem a vista a uma distância mínima de 20cm. Dessa distância, qual a separação mínima entre dois pontos que pode ser distinguida? (*resposta com dois significativos*)
- (b) O diâmetro da Lua é de 3.480Km. Se ele é vista a olho nu, numa noite de lua cheia, sob um ângulo de meio grau, a que distância aproximada ela está de nós? (*compare com o dado conhecido para a distância média entre a Lua e a Terra : 380 mil quilômetros*)

**Exercício 12:** Escreva a fórmula das funções senoidais abaixo na forma geral  $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ . A amplitude deve ser positiva e especificada com três significativos, e a fase em graus e minutos; deixe a frequência angular escrita explicitamente em termos de  $\pi$ .



**Exercício 13:** Determine  $A$  e  $\phi$  de modo que:

- (a)  $30\text{sen}(5t) + 40\text{cos}(5t) = A\text{cos}(5t+\phi)$
- (b)  $30\text{cos}(10\pi t+30^\circ) + 40\text{cos}(10\pi t-45^\circ) = A\text{cos}(10\pi t+\phi)$
- (c)  $12\text{sen}(35\pi t+43^\circ) - 15\text{sen}(35\pi t+75^\circ) = A\text{cos}(35\pi t+\phi)$

*(A deve ser positivo e especificado com três significativos, e o ângulo  $\phi$  em graus e minutos)*

## RESPOSTAS

**Exercício 1:** (a)  $\alpha = 53^{\circ}8'$  ;  $\beta = 36^{\circ}52'$  (b)  $\alpha = 22^{\circ}37'$  ;  $\beta = 67^{\circ}23'$

**Exercício 2:** (a)  $b = 3,21$   $c = 3,83$  (b)  $a = 10,4$   $c = 2,68$  (c)  $a = 14,6$   $c = 13,7$

**Exercício 3:** (a) 218 m/km ; (b)  $24^{\circ}14'$

**Exercício 4:**  $H = 37,7\text{m}$   $h = 4,28\text{m}$

**Exercício 5:**  $x = 17,9$   $y = 14,6$

**Exercício 6:** (a) 10,1 ;  $52^{\circ}29'$  (b) há duas soluções: 13,9 e  $59^{\circ}21'$  ou 5,75 e  $120^{\circ}38'$

**Exercício 7:**  $A = 3,32$  ;  $\alpha = 35^{\circ}31'$

**Exercício 8:**  $58^{\circ}25'$  ;  $73^{\circ}24'$  ;  $48^{\circ}11'$

**Exercício 9:**  $57^{\circ}17'45''$  ; 0,0175 rad

**Exercício 10:** 6150Km (o valor moderno é 6370Km)

**Exercício 11:** (a)  $58\mu\text{m}$  (b) 399 mil quilômetros

**Exercício 12:** (a)  $f(t) = 20\cos(10\pi t - 66^{\circ}25')$  (b)  $f(t) = 10\cos(200\pi t + 143^{\circ}8')$  (c)  $f(t) = 50\cos\left(\frac{2\pi}{15}t + 66^{\circ}25'\right)$

**Exercício 13:** (a)  $A=50$  e  $\phi=-36^{\circ}52'$  ; (b)  $A=55,9$  e  $\phi=-13^{\circ}45'$  ; (c)  $A=7,98$  e  $\phi=217^{\circ}49'$  ;

---

© 2004-9 Maurício Fabbri  
MCT/INPE : <http://www.las.inpe.br/~fabbri>  
Universidade São Francisco – USF  
Italva/Campinas – <http://www.saofrancisco.edu.br>  
São Paulo - Brazil  
Permitido uso livre para fins educacionais,  
sem ônus, desde que seja citada a fonte.