<u>MATEMÁTICA II</u> - Engenharias/Itatiba

1º Semestre de 2009

Prof. Maurício Fabbri

4ª Série de Exercícios

DETERMINANTES

1. Determinante de ordem 2

Considere o sistema linear $\begin{cases} px + qy = a \\ rx + sy = b \end{cases}$. As incógnitas são x e y. Multiplicando a primeira equação por s, a segunda por (-q) e somando, obtemos (ps-qr)x = sa-qb . Portanto, se (ps-rq) ≠ 0, temos uma única solução. Se (ps-rq) = 0 e (sa-qb) ≠ 0, não há solução alguma. Se (ps-rq) = 0 e (sa-qb) = 0, temos infinitas soluções.

A quantidade D = ps-rq é definida como sendo o *determinante* da matriz quadrada $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Escrevemos $\quad D = \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = pq - rs$

O determinante é um número associado a uma matriz quadrada, que dá informação sobre a dependência linear entre as linhas e/ou as colunas da matriz. Na prática, várias fórmulas podem ser escritas de maneira abreviada sob a forma de determinantes.

<u>Exercício 1</u>: Calcule o determinante das matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2. Determinante de ordem maior do que 2

Os determinantes podem ser definidos de maneira recursiva *(Laplace)*, como segue:

(1) Para uma matriz **A** de ordem 1, det(**A**) = a_{11}

(2) Para uma matriz **A** de ordem N > 1, fazemos:

- alternativa 1 *(desenvolvimento por linhas)*

escolha uma linha i e calcule $\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{M}_{ij})$

- alternativa 2 *(desenvolvimento por colunas)*

escolha uma coluna j e calcule $\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{M}_{ij})$

, onde $\mathbf{M}_{ij}$ é a matriz obtida de **A** retirando-se a linha i e a coluna j.

A quantidade $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{M}_{ij})$ é também chamada de *cofator* do elemento a_{ij} .

Exercício 2: Verifique a definição acima para uma matriz quadrada de ordem 2.

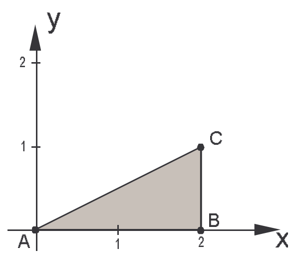
Para uma matriz de ordem 3, é mais fácil decorar a regra de Sarrus:

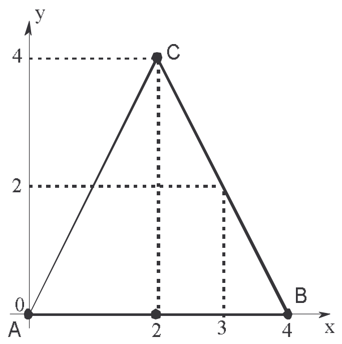
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overset{-}{\underset{+}{\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ p & q & r & p & q \\ x & y & z & x & y \end{matrix}}} = aqz + brx + cpy - xqc - yra - zpb$$

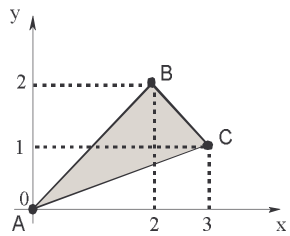
Exercício 3: Calcule o determinante das matrizes, pela regra de Sarrus:

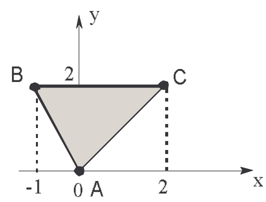
(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 4: A área de um triângulo com vértices (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C) pode ser encontrada pelo determinante $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$. Calcule a área de cada triângulo abaixo:









Exercício 5: Calcule os determinantes abaixo, pela definição recursiva:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Propriedades dos determinantes

(I) Se duas linhas ou duas colunas de **A** são iguais ou proporcionais, det(**A**) = 0

(II) Se **A** tiver uma linha ou coluna de zeros, det(**A**) = 0

(III) det(**A**) = det($\mathbf{A}^t$)

(IV) Se a matriz **B** for obtida trocando de posição duas linhas ou duas colunas de **A**, então det(**B**) = -det(**A**)

(V) Se a matriz **B** for obtida multiplicando por k uma linha ou coluna de **A**, então det(**B**) = k.det(**A**)

(VI) Se uma linha da matriz **A** é substituída pela soma dessa linha com um múltiplo de outra linha, o determinante não se altera.

(VII) Se uma coluna da matriz **A** é substituída pela soma dessa coluna com um múltiplo de outra coluna, o determinante não se altera.

(VIII) det($\mathbf{I}_N$) = 1

(IX) Sendo **A** e **B** duas matrizes quadradas de mesma ordem det(**AB**) = det(**A**).det(**B**)

Exercício 6: Utilize as propriedades acima para calcular rapidamente o determinante das matrizes abaixo:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Eliminação de Gauss

As transformações elementares em uma matriz são as seguintes:

($L_i \leftrightarrow L_j$) : troca de posição entre duas linhas i e j *(muda o sinal do determinante)*
($L_i \leftarrow kL_i$) : Multiplicação da linha i por um número k *(multiplica o determinante por k)*
($L_i \leftarrow L_i + kL_j$) : Somar a uma linha i um múltiplo de uma outra linha j ($i \neq j$) *(não altera o determinante)*

Essas transformações podem também ser feitas com as colunas.

Usando transformações elementares, é possível reduzir uma matriz **A**, N×M, a uma forma *canônica*, definida como segue:

- defina o número k_i tal que:
  $k_i = 0$ se $a_{i1} \neq 0$
  $k_i = i+1$ se $a_{ij} = 0$ para todo j
  $k_i = m$ se $a_{ij} = 0$ para $j < m$ e $a_{ij} \neq 0$ para $j = m$
  (k_i é a posição do primeiro elemento não-nulo na linha i)
  (k_i = 0 se o primeiro elemento da linha i não é zero)
  (k_i = i+1 se a linha i for nula)

- a matriz **A** está na forma canônica quando, se $i > j$ então $k_i > k_j$
  (a posição do elemento não-nulo aumenta à medida que descemos nas linhas da matriz, até que eventualmente atingimos apenas linhas nulas)

Por exemplo, as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ estão na forma canônica.

Exemplo: Vamos reduzir a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ para a forma canônica, utilizando operações elementares:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercício 7: Reduza as matrizes abaixo para a forma canônica. Anote em cada passo a transformação utilizada.

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & 17 \\ 1 & -9 & -7 \\ -1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Posto de uma matriz

Seja **A** uma matriz N×M.

Podemos pensar nas N linhas da matriz **A** como sendo as componentes de N vetores de dimensão M.
Se N > M, então pelo menos um desses vetores é uma combinação linear dos outros.
Podemos pensar nas M colunas da matriz **A** como sendo as componentes de M vetores de dimensão N.
Se M > N, então pelo menos um desses vetores é uma combinação linear dos outros.

O posto da matriz **A** é o maior número de vetores linearmente independentes que pode ser tomado das linhas ou das colunas da matriz.

→ Observamos que o posto da matriz **A** é o número de linhas não-nulas que existem na sua forma canônica.

Por exemplo, a forma canônica de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, portanto o posto de **A** é 2.

Exercício 8: Encontre o posto de cada uma das matrizes do Exercício 7.

RESPOSTAS

Exercício 1: (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 1 (e) 1

Exercício 3: (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) 10

Exercício 4: 1, 8, 2, 3

Exercício 5: (a) 12 (b) -1 (c) 0 (d) 10 (e) -2 (f) 0

Exercício 6: (a) 0 (b) 1 (c) 0

Exercício 7: O procedimento não é único, e a resposta pode variar.

(a) A transformação $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$ produz $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Fazendo $L_1 \leftrightarrow L_2$, obtemos $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

(c) A seqüência $\begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{matrix}$ produz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) A seqüência $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$ $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$ produz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(e) Fazendo $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$, obtemos $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -7 \end{pmatrix}$

(f) A seqüência $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 8L_4 - 3L_3 \end{matrix}$ $L_4 \leftarrow 10L_4 - 72L_3$ produz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(g) A seqüência $\begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{matrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ produz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercício 8: (a) 2 (b) 3 (c) 3 (d) 4 (e) 2 (f) 3 (g) 3
