MATEMÁTICA II - Engenharias/Itatiba

1° Semestre de 2009
Prof. Maurício Fabbri

5ª Série de Exercícios

SISTEMAS LINEARES

1. INVERSÃO DE MATRIZES

(I) Uma matriz quadrada **A** é invertível se existir a matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}$.

Exercício 1. Prove que, se **A** é invertível, então $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$

(II) Uma matriz que não é invertível é chamada de singular. Prova-se que uma matriz é singular se e só se o seu determinante é zero.

(III) Se **A** é invertível, então ela pode ser reduzida à matriz identidade **I** através de transformações elementares (tente provar isto!). Se **S** é a matriz que representa a seqüência de transformações elementares tais que **SA** = **I**, então $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1}$. Se escrevermos isso na forma **SIA** = **I**, vemos que, para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$, basta aplicar a seqüência S à matriz identidade.

Exemplo: Para encontrar a inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, utilizamos a eliminação de Gauss para reduzir **A** à matriz identidade. Ao mesmo tempo, aplicamos a mesma seqüência de transformações à matriz **I**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right. \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

Portanto, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (verifique !)

(IV) Quando existe uma seqüência de operações elementares que transforma uma matriz **A** numa matriz **B**, dizemos que **A** e **B** são equivalentes. Portanto, uma matriz **A** é invertível se e somente se ela for equivalente à matriz identidade.

NOTE que, se a matriz for singular, sua forma canônica contém uma linha toda de zeros, e portanto ela não é equivalente à matriz identidade.

Exercício 2. Encontre a inversa de cada uma das matrizes seguintes, caso possível, pela técnica da eliminação de Gauss:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ (k) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (m) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (n) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (o) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (p) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ (q) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(V) Se a matriz **A** não for singular, a solução do sistema de equações $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Portanto, se $\mathbf{A}^{-1}$ for conhecida o vetor **X** pode ser facilmente encontrado. Esta técnica só é adequada quando a inversa de **A** já está disponível, ou é facilmente obtida.

Exercício 3. Utilizando os resultados do exercício 2, encontre o vetor **X** tal que

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, para $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ e para $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ -38 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, para $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e para $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. SISTEMAS LINEARES

(VI) Sejam N quantidades $x_1, x_2, \ldots x_N$, que devem ser determinadas em um problema numérico. Essas N quantidades são chamadas de incógnitas ou variáveis do problema. É costume escrever essa seqüência de incógnitas na forma abreviada x_i, i = 1,N .

Exemplo: determinar o número de patos e de cachorros que existem em um quintal. As incógnitas são x_1 = número de patos e x_2 = número de cachorros

(VII) Uma operação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_Nx_N$, onde $a_1, a_2, \ldots a_N$ são constantes é chamada de combinação linear entre as incógnitas. Usando a notação de somatório, podemos escrever a combinação linear como $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$.

(VIII) Ao atribuir um valor para o resultado numérico da combinação linear, temos uma equação linear nas incógnitas x_i, i = 1,N. Uma equação linear tem então a forma $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i = b$.

Exemplo: se no quintal só há patos e cachorros, e o número total de patas no quintal for 26, teremos a equação linear $2x_1 + 4x_2 = 26$

(IX) Um conjunto de M equações lineares nas N incógnitas é chamado de sistema de equações lineares. Cada equação é uma condição que as incógnitas devem satisfazer.

Exemplo: A informação sobre o número total de patas forneceu uma única equação para as incógnitas x_1 e x_2. Se soubermos, além disso, que o número total de bichos no quintal é 10, temos o sistema linear 2×2

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 26 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

(X) Na notação de somatório, um sistema linear com M equações e N incógnitas se escreve

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji} x_i = b_j \ , \ j = 1, M$$

Se definimos a matriz dos coeficientes **A** com elementos a_{ij} , o vetor das incógnitas **X** com elementos x_i , e o vetor das constantes **B** com elementos b_j , o sistema se escreve simplesmente

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

A é uma matriz M×N , **X** um vetor M×1 e **B** um vetor M×1

Exemplo: no problema do quintal, temos $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 26 \\ 10 \end{pmatrix}$

(XI) Uma solução do sistema linear é um conjunto de valores $\bar{x}_i$, i = 1,N para as incógnitas que satisfaz todas as equações do sistema, isto é, para os quais $\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\bar{x}_i = b_j$, j = 1,M .

Exemplo: uma solução para o problema do quintal é $\bar{x}_1 = 7 \quad \bar{x}_2 = 3$. *Essa solução pode também ser escrita como o par ordenado (7, 3).*

3. PROPRIEDADES DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA LINEAR

(XII) O sistema de equações lineares é consistente quando tem pelo menos uma solução. Um sistema linear consistente pode ser determinado ou indeterminado.

- o sistema é determinado quando admite uma e apenas uma solução

Exemplo: o problema do quintal, com os dados fornecidos, é determinado, pois tem uma única solução, o conjunto (7, 3)

- o sistema é indeterminado quando apresenta infinitas soluções.

Exemplo: se soubéssemos apenas o número total de patas, isto é, se a única equação disponível fosse $2x_1 + 4x_2 = 26$ *, o problema do quintal admitiria infinitas soluções. Podemos escrever essas soluções sob a forma* $\left(x_1 , \frac{13-x_1}{2}\right)$*, ou ainda* $(13-2x_2 , x_2)$ *. Do ponto de vista prático, pode ser que nem todas essas soluções sejam aceitáveis.*

- o sistema é inconsistente quando não há nenhuma solução

Exemplo: o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$ *é inconsistente*

OBS: Em um problema real, pode haver algum outro critério, além das equações, que determine se uma solução é ou não aceitável. Por exemplo, no problema do quintal, sabemos que uma solução deve ser um par de números inteiros positivos. Não vamos considerar essas outras condições.

(XIII) Um sistema linear sempre se enquadra em um dos três casos seguintes: ou tem solução única (determinado), ou tem um número infinito de soluções (indeterminado), ou não tem nenhuma solução (inconsistente).

Sistemas que não são lineares podem exibir um número qualquer de soluções.
Por exemplo, o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$ *admite duas soluções: (3, 1) e (2 , ½) .*

(XIV) As condições de existência ou não de soluções de um sistema linear é semelhante à condição que ocorre em uma equação algébrica simples como ax = b :

- se a ≠ 0 , então ax = b tem uma única solução : x = b/a
- se a = 0 , então é preciso examinar b. Se a = 0 e b = 0, temos infinitas soluções, uma vez que qualquer valor de x satisfaz 0x = 0
- se a = 0 e b ≠ 0, a equação é inconsistente, porque nenhum valor de x pode satisfazer 0x = b ≠ 0; não há solução

(XV) O que se deve examinar em um sistema linear é se as equações são independentes e consistentes entre si. Isso pode ser feito calculando determinantes, mas a maneira mais conveniente é usar a eliminação de Gauss para reduzir o sistema à forma canônica, quando então pode ser facilmente analisado.

(XVI) Note que existir infinitas soluções não é o mesmo que dizer que "quaisquer valores servem". Por exemplo, a equação $x_1 + x_2 = 10$ admite infinitas soluções, mas todas elas são da forma $(x_1, 10-x_1)$, tais como (2 , 8) ou (-3, 13) ou (3,12 , 6,88); (3, 4) não é solução.

Um modo técnico de analisar o que ocorre em um sistema linear é como segue:

- seja $\mathcal{V}$ o espaço dos vetores de N componentes $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$
- pode-se provar que existem, no máximo, N vetores independentes em $\mathcal{V}$.

  Dizemos que a dimensão de $\mathcal{V}$ é N.
- uma equação linear $\sum_{i=1}^{N} a_{ji} x_i = b_j$, com pelo menos um dos $a_{ji} \neq 0$, restringe os vetores $\vec{x}$ a um subespaço de $\mathcal{V}$, que chamaremos de $\mathcal{S}$; isto é, $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$.
- o número máximo de vetores independentes em $\mathcal{S}$ é N-1, ou seja, a dimensão de $\mathcal{S}$ é (N-1) . Isso significa que, em $\mathcal{S}$, apenas (N-1) componentes de $\vec{x}$ podem ser escolhidas livremente.
- duas equações lineares são independentes quando restringem os vetores $\vec{x}$ a subespaços distintos $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ de $\mathcal{V}$
- uma equação linear é independente de outras M equações se $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_M$ (†)
- M equações lineares são consistentes se $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \dots \cap \mathcal{S}_M \neq \varnothing$
- portanto, M equações lineares independentes e consistentes restringem os vetores $\vec{x}$ a um subespaço com dimensão (N-M). Isto significa que, das N componentes do vetor $\vec{x}$, apenas (N-M) podem ser escolhidas livremente. Se N = M, todas as componentes de $\vec{x}$ estão determinadas.

(†) Note que, em um conjunto de equações, a independência duas a duas não implica na independência de todo o conjunto. É isso que complica a análise de um sistema linear.

(XVII) Exemplos de análise utilizando a eliminação de Gauss:

Exemplo 1 : Reduzindo o sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-2z=3 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ para a forma canônica, temos $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+3z=-3 \\ 2z=-2 \end{cases}$.

Portanto, a solução única é (1, 0, -1) .

Exemplo 2 : Reduzindo o sistema $\begin{cases} x+2y-4z=2 \\ x-y+z=1 \\ -x+4y-6z=3 \end{cases}$ para a forma canônica, temos $\begin{cases} x+2y-4z=2 \\ 3y-5z=1 \\ 0z=3 \end{cases}$.

O sistema é inconsistente (não há solução).

Exemplo 3 : Reduzindo o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y+3z=2 \\ 2x-y+4z=5 \\ 5x+2y+7z=14 \end{cases}$ para a forma canônica, temos $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 3y-2z=1 \end{cases}$.

O sistema é indeterminado (infinitas soluções). Cada solução tem a forma (2-5z , 1+2z , 3z), onde z é qualquer número.

OBS : Há mais de uma maneira de reduzir o sistema à forma canônica. Dependendo dos passos seguidos, a aparência e os valores dos coeficientes pode mudar, mas a análise final será sempre a mesma.

Exercício 4. Estude e resolva os seguintes sistemas lineares utilizando a eliminação de Gauss (escalonamento).

(a) $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y-2z+3w=2 \\ 2x+4y-3z+4w=5 \\ 5x+10y-8z+11w=12 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x+y-2z+3w=1 \\ 3x+2y-z+2w=4 \\ 3x+3y+3z-3w=5 \\ x-y-7z+9w=-11 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3y+2x-z=-2 \\ x-y+z=3 \\ z-x=7 \\ 4y-z-3x=5 \end{cases}$

Exercício 5. Escreva as soluções do sistema (b) do exercício anterior em termos das incógnitas w e y.

(XVIII) Sistemas homogêneos são aqueles que admitem a solução trivial (0, 0, ... 0). Em um sistema linear homogêneo, o vetor das constantes deve ser nulo. O caso mais interessante do ponto de vista prático é quando o sistema homogêneo é indeterminado, pois nesse caso há outras (infinitas) soluções além da solução trivial.

Exercício 6. Estude e resolva os seguintes sistemas homogêneos por escalonamento.

(a) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-2y-z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-2y-z=0 \\ x+2y+1{,}4z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-4y+2z=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+4y-z=0 \\ 3x+2y+2z=0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x+y-z+2w=0 \\ x+2y+2z-3w=0 \end{cases}$

(XIX) Uma solução de um sistema linear com N incógnitas pode ser escrita como um vetor $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_N)$, cujo módulo é definido como $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$.

Exercício 7. Escreva as soluções do sistema (c) do exercício 6 em termos da incógnita z. Encontre uma solução com módulo 1.

Exercício 8. Escreva as soluções do sistema (e) do exercício 6 em termos da incógnita w. Encontre uma solução com módulo 1.

Exercício 9. Estude os sistemas lineares abaixo com respeito ao parâmetro K. Para quais valores de K (i) o sistema tem solução única? (ii) o sistema tem infinitas soluções? (iii) o sistema é inconsistente (não tem nenhuma solução) ?

(a) $\begin{cases} x+y+Kz=2 \\ 3x+4y+2z=K \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+Ky-z=-2 \\ x+2y+Kz=1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} Kx+y+z=1 \\ x+Ky+z=1 \\ x+y+Kz=1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \\ y+z-t=0 \\ z+Kt=0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x-Ky+2z=0 \end{cases}$

Exercício 10. Para cada um dos sistemas lineares abaixo, (i) determine o valor de λ para que haja ao menos uma solução não-nula e (ii) nesse caso, encontre uma solução com módulo 1.

(a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ -x+2y+\lambda z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-2y-z=0 \\ x+2y+\lambda z=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ x+\lambda y+z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$

Exercício 11. Se $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, determine o número λ para que exista um vetor não nulo $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tal que $\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{X}$. Para cada valor de λ encontrado, encontre o vetor **X** de módulo 1 que satisfaz essa equação.

Exercício 12. Repita o exercício anterior para $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

RESPOSTAS

Exercício 2: (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (f) singular (g) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (i) singular (j) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 3 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (k) singular (l) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (m) $\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ -19 & -3 & 10 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

(n) singular (o) singular (p) singular (q) $\frac{1}{80}\begin{pmatrix} 16 & 8 & -11 \\ 0 & 40 & -15 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Exercício 3: (a) $\begin{pmatrix} 111 \\ 97 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -194 \\ -165 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercício 4: (a) solução única: (1,2,-3) (b) infinitas soluções da forma (4+w-2y , y , 2w+1 , w), com y e w quaisquer (c) o sistema é inconsistente; não há solução (d) solução única x = -1 y = 2 e z = 6

Exercício 5: veja resposta anterior

Exercício 6: (a) apenas a solução trivial (0,0,0) (b) infinitas soluções da forma (z, 3z, -5z)
(c) infinitas soluções da forma (2z, 3z, 5z) (d) apenas a solução trivial (0,0,0)
(e) infinitas soluções da forma (-w, w, w, w)

Exercício 7: $(2,3,5)/\sqrt{38}$ **Exercício 8:** (-1,1,1,1)/2

Exercício 9: (a) se K≠3, a solução é única; se K=3, teremos infinitas soluções
(b) se K=2 teremos infinitas soluções; se K=-5 o sistema é inconsistente; para K diferente desses valores a solução é única
(c) se K=1 teremos infinitas soluções; se K=-2 o sistema é inconsistente; para K diferente desses valores a solução é única
(d) se K=-2/3 teremos infinitas soluções, caso contrário a solução é única
(e) se K=-4/3 teremos infinitas soluções, caso contrário a solução é única

Exercício 10: (a) λ=-2. As soluções são da forma (-4k, k, 3k). Uma solução de módulo 1 é $(-1,-3,5)/\sqrt{35}$
(b) λ=7/5. As soluções são da forma (-k, -3k, 5k). Uma solução de módulo 1 é $(-1,-3,5)/\sqrt{35}$
(c) Temos duas possibilidades:
(1) λ=1. Neste caso, as soluções serão da forma (-m-p, p, m).
Uma solução de módulo 1 poderia ser $(0,1,-1)/\sqrt{2}$
(2) λ=-2. Neste caso, as soluções serão da forma (m, m, m).
Uma solução de módulo 1 é $(1,1,1)/\sqrt{3}$

Exercício 11: λ = -1 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -0{,}7071 \\ 0{,}7071 \end{pmatrix}$ e λ = 4 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -0{,}5547 \\ -0{,}8321 \end{pmatrix}$

Exercício 12: λ = -1 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \end{pmatrix}$ e λ = 5 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -0{,}7071 \\ -0{,}7071 \end{pmatrix}$
