EXERCÍCIOS DE REVISÃO

2ª Prova de Cálculo III

2º semestre de 2009

Prof. Maurício Fabbri

Ex.1) Se a transformada de Laplace de uma função f(t) é $F(s)=\dfrac{5(2s^2+s-3)}{s(s+3)(s+5)}$, obtenha o valor inicial e o valor de regime de f(t).

Resolução: valor inicial : $f(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s.F(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{5(2s^2+s-3)}{(s+3)(s+5)}=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{5(2s^2)}{(s)(s)}=10$

valor de regime : $f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} s.F(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{5(2s^2+s-3)}{(s+3)(s+5)}=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{5(-3)}{(3)(5)}=-1$

Reforço: Repita para $F(s)=\dfrac{5(2s^2+s-3)}{s(s+1)^2(s+3)}$.

Resposta: f(0) = 0 , f(∞)=−5.

Ex.2) Se a transformada de Laplace de uma função f(t) é $F(s)=\dfrac{2(s^2+3s+1)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$, quais os pólos da transformada de Laplace de $g(t)=3e^{-4t}f(t)$?

Resolução: G(s) = 3F(s+4), e portanto $G(s)=\dfrac{6[(s+4)^2+3(s+4)+1)}{(s+5)(s+6)(s+8)}$, que tem pólos em −5, −6 e −8.

Reforço: Se a transformada de Laplace de f(t) é $F(s)=\dfrac{3s+1}{(s+2)(s+3)(s+5)}$, quais os pólos da transformada de Laplace de $g(t)=4e^{-5t}f(t)$? *Resposta: −7, −8 e −10*

Ex.3) Se a transformada de Laplace de uma função f(t) é $F(s)=\dfrac{5s+1}{s(s+3)}$, quais os valores inicial e final de $h(t)=\dfrac{df}{dt}$?

Resolução: H(s) = sF(s)−f(0), e $f(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s.F(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{5s+1}{s+3}=5$

portanto $H(s)=\dfrac{5s+1}{s+3}-5=\dfrac{-14}{s+3}$

então $h(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s.H(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{-14s}{s+3}=-14$ e $h(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} s.H(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{-14s}{s+3}=0$

Reforço: Se a transformada de Laplace de uma função f(t) é $F(s)=\dfrac{3s-1}{s(s+4)}$, quais os valores inicial e final de $h(t)=\dfrac{df}{dt}$? *Resposta: f(0) = −13 , f(∞)= 0.*

Ex.4) Quais os valores de A, B e C de modo que $\frac{27}{s(s+3)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{(s+3)^2}$?

Resolução: $A=\left.\frac{27}{(s+3)^2}\right|_{s=0}=3$; $C=\left.\frac{27}{s}\right|_{s=-3}=-9$; $B=\left.\frac{d}{ds}\left(\frac{27}{s}\right)\right|_{s=-3}=-\left.\frac{27}{s^2}\right|_{s=-3}=-3$

Reforço: Quais os valores de A, B e C de modo que $\frac{27}{s^2(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s^2}$?

Resposta: A=−3, B=3 e C=9

Ex.5) Se $F(s)=\frac{500s}{(s+1)(s^2+8s+116)}$, calcule a amplitude inicial e a fase da parte oscilatória de f(t).

Resolução: $F(s)=\frac{A}{s+1}+R(s)$. A parte oscilatória corresponde a R(s), e, no domínio do tempo, $r(t)=Me^{\sigma t}\text{sen}(\omega t+\phi)$

$\sigma \pm j\omega$ são as raízes de $s^2 + 8s + 116 = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{-8\pm\sqrt{64-464}}{2}=-4\pm j10$

$$M\underline{|\phi} = \left.\frac{1}{10}\frac{500s}{s+1}\right|_{s=-4+j10}=51{,}581\underline{|5^o6'}$$

A amplitude inicial é 51,6 e a fase é 5º

Reforço: Se $F(s)=\frac{500(s+2)}{s(s^2+8s+116)}$, calcule a amplitude inicial e a fase da parte oscilatória de f(t).

Resposta: 47,34 e −10º29′

Ex.6) Escreva a solução do problema de valor inicial $\begin{cases} f''+3f'+2f=2\cos(5t) \\ f(0)=0 \\ f'(0)=2 \end{cases}$ no domínio da freqüência.

Resolução: $L\{f''\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2F-2$
$L\{f'\}=sF(s)-f(0)=sF$
$L\{\cos(5t)\}=\frac{s}{s^2+25}$

No domínio da freqüência, a equação diferencial fica, então,

$$s^2F-2+3(sF)+2F=\frac{2s}{s^2+25} \quad\Rightarrow\quad (s^2+3s+2)F=\frac{2s}{s^2+25}+2=\frac{2s^2+2s+50}{s^2+25}$$

$$\Rightarrow\ F(s)=\frac{2(s^2+s+25)}{(s^2+3s+2)(s^2+25)}$$

Reforço: Escreva a solução do problema de valor inicial $\begin{cases} f''+4f'+5f=3\text{sen}(10t) \\ f(0)=5 \\ f'(0)=2 \end{cases}$ no domínio da freqüência.

Resposta: $F(s)=\frac{5s^3+22s^2+500s+2230}{(s^2+4s+5)(s^2+100)}$

Ex.7) Se f(t) é solução do problema de valor inicial $\begin{cases} f''+6f'+8f = 80 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 28 \end{cases}$, calcule f(0,5).

Resolução: A função forçante é g(t) = 80, então a solução particular é um função constante $f_p(t) = K$. Substituindo essa solução na equação diferencial, encontramos K = 10, e portanto $f_p(t) = 10$.

A equação característica da e.d. é $x^2 + 6x + 8 = 0$, que tem raízes −2 e −4. Portanto, a solução geral da homogênea associada é $f_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t}$

Então a solução geral da e.d. é $f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t} + 10$

Para satisfazer as condições iniciais, sendo $f'(t) = -2Ae^{-2t} - 4Be^{-4t}$, devemos ter $\begin{cases} A + B + 10 = 0 \\ -2A - 4B = 28 \end{cases}$. Resolvendo esse sistema, encontramos A = −6 e B = −4. Assim, $f(t) = 10 - 6e^{-2t} - 4e^{-4t}$, de modo que f(0,5) = 7,2514 .

Reforço: Se f(t) é solução do problema de valor inicial $\begin{cases} f''+9f'+18f = 18 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 12 \end{cases}$, calcule f(0,2).

Resposta: 1,194