CÁLCULO I

1º Semestre de 2012

Prof. Maurício Fabbri

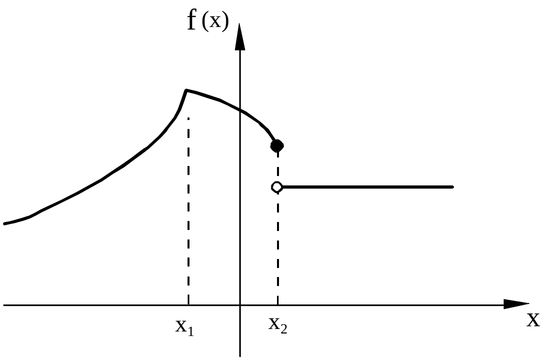
3ª Série de Exercícios : *Diferenciabilidade; técnicas e regras de derivação; aplicações*

DIFERENCIABILIDADE

f(x) é *diferenciável* no ponto x_0 quando existe $f'(x_0)$.

(*o gráfico de f admite uma tangente no ponto x_0*)

NOTE que a diferenciabilidade implica em continuidade, mas o contrário não é verdadeiro.



Na figura ao lado, f(x) é diferenciável em todos os pontos, exceto x_1 e x_2.

f(x) é contínua em x_1, mas não é diferenciável nesse ponto.

f(x) não é contínua em x_2, muito menos diferenciável nesse ponto.

LINEARIDADE

Se f(x) = a.h(x) + b.g(x) , onde a e b são constantes (*não dependem de x*), então $f'(x) = a.h'(x) + b.g'(x)$.

Na notação de diferenciais, teremos $\dfrac{df}{dx} = a\dfrac{dh}{dx} + b\dfrac{dg}{dx}$.

REGRA DO PRODUTO

Se f(x) = g(x).h(x), então $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{dg}{dx}h(x) + g(x)\dfrac{dh}{dx}$.

Esta regra é mais facilmente lembrada na forma $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

A demonstração é como segue:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - g(x)h(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - g(x)h(x+\Delta x) + g(x)h(x+\Delta x) - g(x)h(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} h(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} g(x) \quad = \quad \frac{dg}{dx}h(x) + \frac{dh}{dx}g(x)$$

NOTE que a taxa de variação de um produto não é igual ao produto das taxas de variação !!!

REGRA DO QUOCIENTE

Demonstra-se também que, se $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, então $f'(x)=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exercício 1:

A derivada de $u(x) = x^2$ é $u'(x)=2x$.

A derivada de $v(x)=\sqrt{x}$ é $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Escreva a derivada das funções abaixo, utilizando as regras já vistas acima:

(a) $f(x)=3x^2-2x+4\sqrt{x}-9$ (b) $g(x)=15(x^2+5x-8)\sqrt{x}$ (c) $h(x)=5\dfrac{3x^2-4}{2+\sqrt{x}}$

Exercício 2: O lado A de um retângulo mede 20cm de comprimento e está aumentando à taxa de 4cm/s; o outro lado desse mesmo retângulo (lado B) mede 30cm de comprimento está aumentando à taxa de 3cm/s.

(a) Calcule a taxa de aumento do perímetro desse retângulo.
(b) Calcule a taxa de aumento da área desse retângulo.
(c) Qual a taxa de aumento da área no instante inicial? Qual será a área real após um segundo? Explique a diferença.
(d) Calcule a taxa de variação da razão de aspecto $r=\dfrac{A}{B}$ desse retângulo.
(e) Escreva a fórmula que dá o comprimento de cada segmento em função do tempo.
(f) Resolva novamente os itens (a), (b) e (d) utilizando essas fórmulas.
(g) Calcule a taxa de aumento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos A e B. Qual a taxa de aumento dessa hipotenusa no instante inicial? *(resposta com 2 significativos)*

A DERIVADA DE x^n

Se $f(x)=x^n \Rightarrow \dfrac{df}{dx}=nx^{n-1}$ (válido para todo $n\in\mathbf{R}$).

CASOS PARTICULARES IMPORTANTES:

$$f(x) = K \Rightarrow f'(x)=0$$
$$f(x) = ax+b \Rightarrow f'(x)=a$$
$$f(x) = ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b$$
$$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$
$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(K, a, b e c sendo constantes, independentes de x)

Exercício 3: Escreva a fórmula da derivada das funções:

(a) $f(x) = 3x-2$ (b) $f(x) = x^2-3x+2$ (c) $f(x)=x^3-4x^2+5x-3$

(d) $f(x)=\dfrac{5}{x}$ (e) $f(x)=\dfrac{6}{x^2}-\sqrt{x}$ (f) $f(x)=5x^7-6x^6+\sqrt[3]{x}-8\sqrt{x}+4$

Exercício 4: Um objeto se move sobre uma linha reta, de modo que a sua posição em função do tempo é dada por:

$$s(t)=\frac{t^2}{240}-\frac{t}{2}+20 \quad \begin{cases} t \text{ em segundos} \\ s \text{ em metros} \end{cases}$$

(a) Qual sua posição nos instantes 0s, 20s, 1min, 2min e 2min20s ?

(b) Calcule a velocidade média $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ entre os instantes:

0 e 60s;
60s e 100s;
0 e 120s;
120s e 140s

(c) Escreva a fórmula para a velocidade instantânea $v(t)=\frac{ds}{dt}$ em função do tempo.

(d) Calcule a velocidade instantânea nos instantes 0, 20s, 1min, 2min e 2min20s.

(e) Escreva e fórmula para a aceleração $a(t)=\frac{dv}{dt}$ em função do tempo.

(f) Qual a posição do corpo quando sua velocidade for de 2m/s?

Exercício 5: Repita o exercício anterior quando $s(t)=-\frac{t^2}{16}+\frac{15}{4}t+\frac{175}{4} \quad \begin{cases} t \text{ em segundos} \\ s \text{ em metros} \end{cases}$

Exercício 6: Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo, marcando a posição das raízes e as coordenadas dos pontos de máximo e mínimo locais:

(a) $f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3-x$.
(b) $f(x) = x(x+1)(x+4) = x^3+5x^2+4x$.
(c) $f(x) = x(1-x)(x-5) = -x^3+6x^2-5x$.

A REGRA DA CADEIA

(derivação composta)

Se $f(x) = u[v(x)]$, então $\frac{df}{dx}=\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$

(supondo que todas as funções envolvidas são diferenciáveis nos pontos que interessam)

Exercício 7: Escreva a fórmula da derivada de cada função abaixo:

(a) $f(x)=(2x-1)^5$ (b) $f(x)=5(7-2x)^3(3x-1)^4$ (c) $f(x)=4\sqrt{3x^2-2x+5}$ (d) $f(x)=7\frac{x^3-3x+1}{(2-x)^3}$

Exercício 8: O raio de um balão esférico, que está sendo inflado, é dado por $r(t)=50-35e^{-t/180}$, onde t está em *segundos* e r em *centímetros*. Qual a taxa de aumento do volume com o tempo, em *litros por minuto*,

(a) No instante inicial? (b) Após 1 minuto? (c) Após muito tempo? *(respostas com 3 significativos)*

Exercício 9: (*desmatamento*) Se a área de uma região circular aumenta 200km^2 por ano, qual a taxa mensal de aumento no perímetro, quando o raio atingir 50km? *(resposta com 3 significativos, em metros por mês)*

O NÚMERO *e*

$$e = 2{,}71828182845904523536028 7\ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

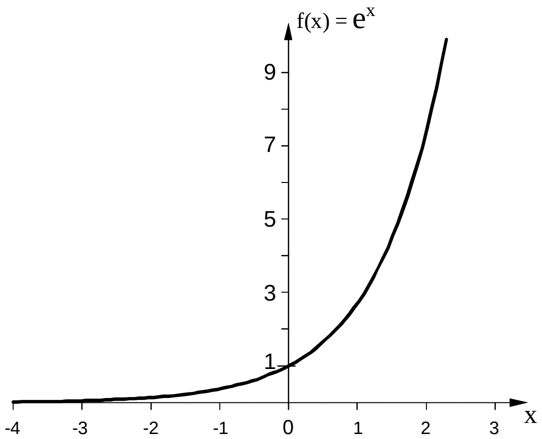
e é o "número de Neper", ou a "base dos logaritmos naturais ou neperianos"
e é um número transcendental (não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais)
(*um outro número transcendental conhecido é o π*)

<u>Exercício 10</u>: Obtenha com a calculadora os números seguintes, expressando o resultado com *quatro significativos*:

(a) $e =$ (b) $e^{-1} =$ (c) $e^{2} =$ (d) $e^{-2} =$ (e) $e^{3} =$ (f) $e^{-3} =$
(g) $e^{1/4} =$ (h) $e^{-1/4} =$ (i) $e^{0} =$
(j) $e^{20} =$ (k) $e^{-20} =$ (l) $e^{\sqrt{2}} =$ (m) $e^{-\sqrt{2}/5} =$

A FUNÇÃO EXPONENCIAL

$f(x) = e^x$ tem as seguintes propriedades importantes:

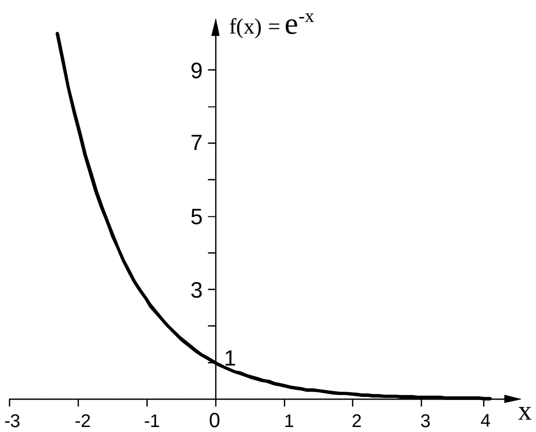


- é sempre crescente
- $f(x) > 0$ para todo x
- $f(0)=1$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$
- f(x) "*cresce mais rápido*" que qualquer potência de x, para x suficientemente grande:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty \text{, para qualquer n.}$$

- A função e^x é a única cuja derivada é ela mesma (a taxa de variação de e^x é e^x !!!) : $\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$

$f(x) = e^{-x}$ tem as seguintes propriedades importantes:



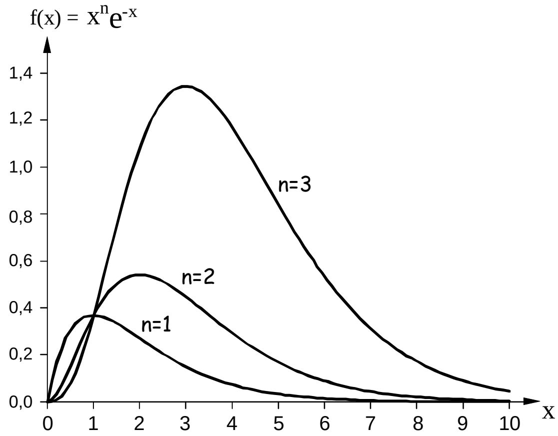
- é sempre decrescente
- $f(x) > 0$ para todo x
- $f(0)=1$
- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
- e^{-x} "*é capaz de matar*" qualquer potência de x, para x suficientemente grande:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0 \text{, para qualquer n.}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}}$$

<u>Exercício 11</u>: Escreva cada uma das seguintes funções como uma única exponencial:

(a) $f(x) = e^x.e^{2x}$ (b) $g(x)=e^{2x}.e^{-x/3}$ (c) $h(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{5x}}$ (d) $m(x) = \dfrac{e^{5x/2}}{e^{-x}}$



A figura ao lado mostra como a exponencial decrescente "*mata*" o crescimento de x^n, para n=1,2 e 3.

<u>Exercício 12</u>: Utilize a derivada de $f(x)=x^n e^{-x}$ para determinar precisamente a localização de cada um dos pontos de máximo nos gráficos ao lado.

A derivada de $f(x) = e^{\alpha x}$ é $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$. ($\alpha$ sendo um parâmetro que não depende de x)

A FUNÇÃO EXPONENCIAL - forma geral

Uma função exponencial decrescente é comumente escrita como $f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$,
onde a constante positiva τ é chamada de *constante de tempo*.
A é o valor inicial da exponencial (em t=0).
Um critério prático muito utilizado é que a exponencial "morre" após três constantes de tempo, ou seja, para $t > 3\tau$. Confira na calculadora a tabela abaixo:

T	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	7τ	8τ	9τ	10τ
$e^{-t/\tau}$	0,368	0,135	0,0497	0,0183	0,00674	0,00248	0,000912	0,000335	0,000123	$< 10^{-4}$

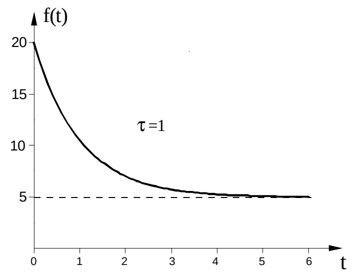
Uma exponencial decrescente pode expressar um "transiente", isto é, uma grandeza que varia com o tempo a partir de um valor inicial e tende a um valor de "regime", ou de "equilíbrio".

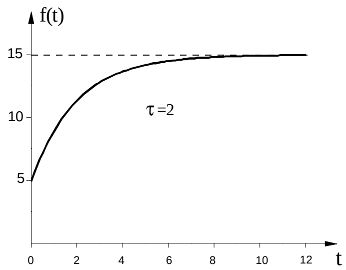
Se I é o valor inicial, F é o valor final e τ é a constante de tempo, um regime transiente exponencial pode ser escrito como:

$$f(t) = F + (I - F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Note que f(0)=I, $f(\infty)$=F e o tempo que o transiente dura é da ordem de 3τ.

Exemplos:





<u>Exercício 13</u>: (a) Escreva a fórmula de cada um dos dois transientes ilustrados na figura acima.
(b) Calcule a taxa de variação inicial de f(t) para cada um dos dois transientes ilustrados na figura acima.

<u>Exercício 14</u>: Um copo de água é retirado da geladeira a 5°C, e esquenta gradualmente até chegar à temperatura ambiente, de acordo com:

$$T(t) = 28 - 23e^{-t} \qquad \begin{cases} t \text{ em minutos} \\ T \text{ em } {}^{o}C \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico T *versus* t.
(b) Qual o valor da temperatura ambiente?
(c) Qual a taxa de aquecimento, em °C/min, no instante inicial? após vinte segundos? após dois minutos? quando a temperatura da água for 26°C?

<u>Exercício 15</u>: Um copo de água, retirado do microondas, esfria gradualmente até chegar à temperatura ambiente, de acordo com:

$$T(t) = 23 + 62e^{-t/4} \qquad \begin{cases} t \text{ em minutos} \\ T \text{ em } {}^{o}C \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico T *versus* t.
(b) Qual o valor da temperatura inicial? Da temperatura ambiente?
(c) Qual a taxa de resfriamento, em °C/min, no instante inicial? após dois minutos? após dez minutos? quando a temperatura da água for de 25°C?
(d) Após quanto tempo a temperatura chegará a 23,2°C?
(e) Em que instante a taxa de resfriamento é de 0,1°C por segundo?

A FUNÇÃO LOG

<u>DEFINIÇÃO</u> : Sendo a > 0 e $a^b = c$, então $b = \log_a c$
<u>NOTE QUE</u> $c > 0$ sempre.

Na ausência de qualquer outra indicação, $\log$ indica $\log_{10}$ e $\ln$ indica $\log_e$.

<u>Exercício 16</u>: Obtenha com a calculadora os números seguintes, expressando o resultado com *quatro significativos*:

(a) $\log(2) =$ (b) $\ln(2) =$ (c) $2*\ln(3) =$ (d) $\ln(3^2) =$ (e) $\ln(5\times8) =$ (f) $\ln(5)+\ln(8) =$
(g) $\ln(12/7) =$ (h) $\ln(12)-\ln(7) =$ (i) $\log(\sqrt{2}) =$ (j) $\frac{1}{2}\log(2) =$

Os resultados acima ilustram as propriedades mais conhecidas dos logaritmos.
Em qualquer base,

$\log(a\times b) = \log(a)+\log(b)$; $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$; $\log(x^n) = n.\log(x)$

<u>Mudança de base</u> : $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

<u>Exercício 17</u>: Utilize sua calculadora para encontrar um número x tal que (*respostas com três significativos*):

(a) $2^x = 5$ (b) $\pi^x = 2$ (c) $3e^x = 5$ (d) $5e^x = 2$ (e) $10^x = e$

→ É interessante e útil notar que $A^{\log_A x} = x$.

<u>Exercício 18</u>: Encontre o valor de x em cada uma das equações abaixo (*respostas com três significativos*):

(a) $2^{\sqrt{2}} = e^x$ (b) $2^{-\sqrt{2}} = e^x$ (c) $2^{-\sqrt{2}} = 5e^{-x}$ (d) $2^{\sqrt{2}} = 7e^{-x/4}$

Taxas de variação: A derivada de f(x) = ln(x) é $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Em geral, teremos $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$.

Exercício 19: Escreva a fórmula da derivada das funções:

(a) f(x) = ln(3x) (b) $f(x) = 2e^{-2x} + 5\ln(x)$ (c) $f(x)=2x^3-0.2e^{-5x}-\ln(3x)$

(d) f(x) = xln(x) (e) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ (f) $f(x) = x^2\ln(x)$

Exercício 20: Um objeto se move sobre uma linha reta, de modo que a sua posição em função do tempo é dada por:

$$s(t) = 20 - 15e^{-t/5} \quad \begin{cases} t \text{ em minutos} \\ s \text{ em metros} \end{cases}$$

(a) Qual sua posição nos instantes 0s, 20s, 1min, 10min e 15min20s ?
(b) Escreva a fórmula para a velocidade instantânea $v(t) = \frac{ds}{dt}$ em função do tempo.
(c) Calcule a velocidade instantânea nos instantes 0s, 20s, 1min, 10min e 15min20s.
(d) Escreva e fórmula para a aceleração $a(t) = \frac{dv}{dt}$ em função do tempo.
(e) Calcule a aceleração nos instantes 0s, 20s, 1min, 10min e 15min20s.
(f) Qual a posição do corpo quando sua velocidade for de 2m/s?

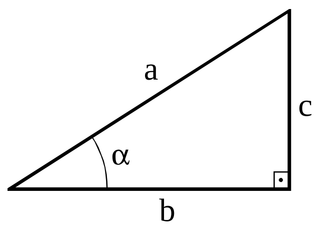
(*todas as respostas com três significativos*)

Exercício 21: A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que metade dos átomos de uma amostra sofra decaimento. Para uma amostra de Polônio, o número de átomos radioativos remanescentes após t dias é dado por $N_0 e^{-t/200}$, onde N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos na amostra.

(a) Qual a meia-vida do Polônio?
(b) Quanto tempo seria necessário para que restasse apenas 1% dos átomos radioativos da quantidade inicial na amostra?

Exercício 22: A meia-vida do Carbono 14 é de 5730 anos. Em uma amostra de madeira fossilizada, constatou-se a presença de apenas 15% do C_{14} encontrado numa árvore viva. Estime a idade da amostra.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$ $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ $\tan\alpha = \frac{c}{b}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

ÂNGULOS COMUNS

graus	*radianos*	seno	coseno	tangente
0^o	0	0	1	0
30^o	π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45^o	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60^o	π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90^o	π/2	1	0	∞

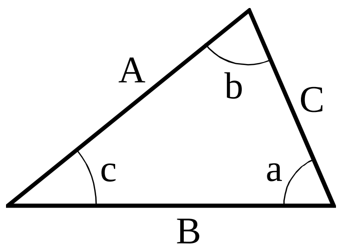
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ $\quad$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$ $\quad$ $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

$\text{sen}(A+B) = \text{sen}A\cos B + \text{sen}B\cos A$ $\quad$ $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \text{sen}A\,\text{sen}B$

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

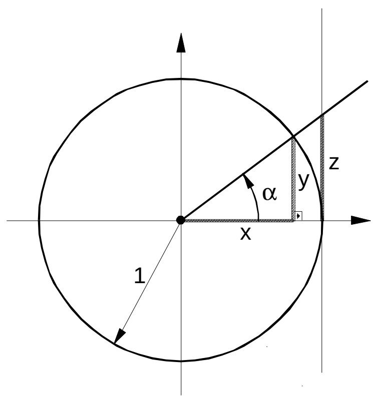


$A^2 = B^2 + C^2 - 2.B.C.\cos(a)$ *(lei dos cossenos)*

$$\frac{A}{\text{sen}(a)} = \frac{B}{\text{sen}(B)} = \frac{C}{\text{sen}(c)}$$ *(lei dos senos)*

$$S = \frac{1}{2}A.B.\text{sen}(c)$$ *(cálculo da área)*

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



$y = \text{sen}(\alpha)$

$x = \cos(\alpha)$

$z = \tan(\alpha)$

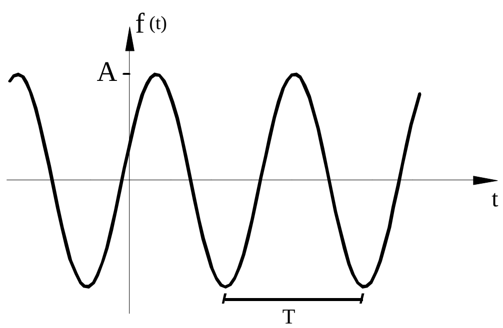
PROPRIEDADES

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$ $\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\quad$ $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

$\text{sen}(\alpha\pm\pi) = -\text{sen}(\alpha)$ $\quad$ $\cos(\alpha\pm\pi) = -\cos(\alpha)$ $\quad$ $\tan(\alpha\pm\pi) = \tan(\alpha)$

$\text{sen}(\alpha) = \cos(\alpha - 90^o)$

FORMA GERAL



$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

A = amplitude
ω = frequencia angular
ϕ = fase

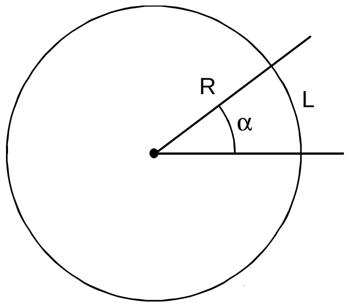
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

DERIVADAS

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(x)=\cos(x) \qquad \frac{d}{dx}\cos(x)=-\mathrm{sen}(x) \qquad \frac{d}{dx}\tan(x)=\sec^2(x)$$

OBS.: Deve-se utilizar a unidade natural de ângulo (*radianos*) para calcular o valor das derivadas

A UNIDADE NATURAL DE ÂNGULOS



A medida do ângulo α é definida como a razão entre o comprimento do arco subentendido pelo ângulo e o raio de uma circunferência com vértice no ângulo:

$$\alpha=\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{raio}}=\frac{L}{R}$$

Costumamos chamar essa razão de *radiano*, mas na verdade é um número puro.

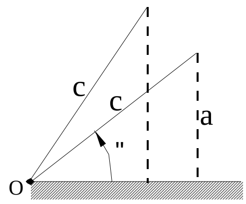
2π rd = 360^o

As funções trigonométricas simples sen(x) e cos(x) tem amplitude 1 e período 2π.

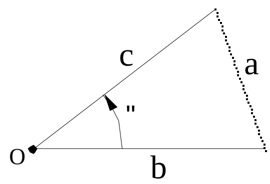
Exercício 23: Escreva a fórmula da derivada das funções seguintes:

(a) $f(x)=5\mathrm{sen}(8x-40)$ (b) $f(t) = 12.t.\cos(3t)$ (c) $f(t)=\dfrac{\mathrm{sen}(2t)}{t}$ (d) $f(z)=5e^{-z/5}\cos(5\pi z+40^o)$ (e) $f(x) = 7\mathrm{sen}^8(3x)$

Exercício 24: Calcular a taxa de aumento de a com o ângulo α, mantendo a distância c constante. Para c=2m, qual a sensibilidade de a com α quando a=1m, em centímetros por grau?



Exercício 25: Calcule a taxa de variação do lado a com o ângulo α, se b e c permanecerem constantes. Para c=5m e b=4m, qual o valor de $\frac{da}{d\alpha}$, em cm/grau, no instante em que a=2m? Utilize a lei dos cossenos, $a^2 = b^2+c^2-2.b.c.\cos(\alpha)$. *(resposta com 3 significativos)*



Exercício 26: Um pêndulo oscila em torno da posição de equilíbrio de acordo com $x(t) = 20\mathrm{sen}(2\pi t)$, onde t é dados em *segundos* e x em *centímetros*. Com que velocidade, em *km/h*, ele passa pela posição de equilíbrio (x=0) ?

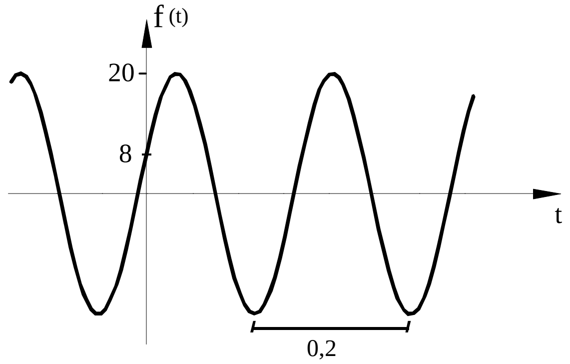
Exercício 27: Determine A e ϕ de modo que:

(a) $30\mathrm{sen}(5t) + 40\cos(5t) = A\cos(5t+\phi)$
(b) $30\cos(10\pi t+30^o) + 40\cos(10\pi t-45^o) = A\cos(10\pi t+\phi)$
(c) $12\mathrm{sen}(35\pi t+43^o) - 15\mathrm{sen}(35\pi t+75^o) = A\cos(35\pi t+\phi)$

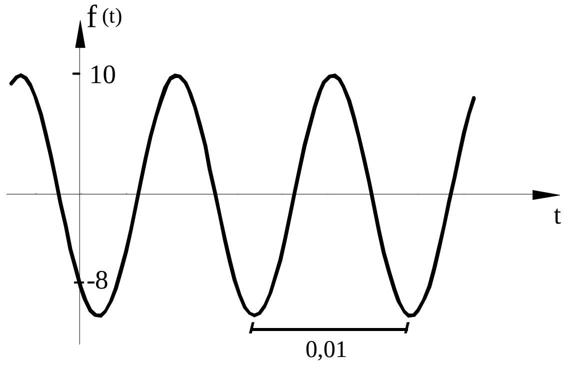
(A deve ser positivo e especificado com três significativos, e o ângulo ϕ em graus e minutos)

<u>Exercício 28</u>: Escreva a fórmula das funções senoidais abaixo na forma geral f(t) = Acos(ωt + ϕ). A amplitude deve ser positiva e especificada com três significativos, e a fase em graus e minutos; deixe a freqüência angular escrita explicitamente em termos de π.

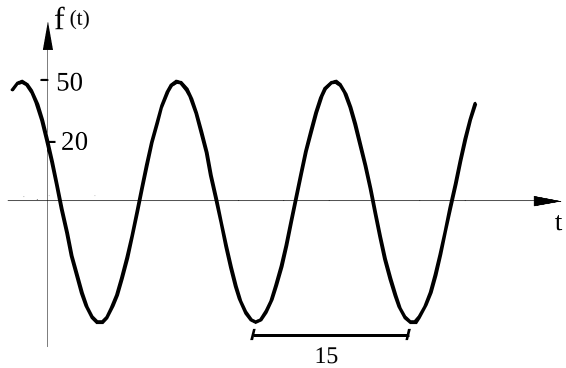
(a)



(b)



(c)



MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Muitos problemas simples de otimização podem ser resolvidos lembrando que, em um máximo ou mínimo local, a derivada de uma função diferenciável vale *zero*. Um ponto x_0 onde $f'(x_0) = 0$ é chamado de *ponto crítico* da função f(x).

Em geral, basta uma simples inspeção para saber se um ponto crítico é máximo local, mínimo local ou ponto de inflexão. Quando necessário, a natureza de um ponto crítico pode ser determinada como segue:

Se x_0 é um ponto crítico de f(x), e se $f^n(x_0) = 0$ mas $f^{n+1}(x_0) \neq 0$, então

- se n é ímpar temos um máximo ou mínimo local; mínimo se $f^{n+1}(x_0) > 0$ e máximo se $f^{n+1}(x_0) < 0$
- se n é par temos um ponto de inflexão

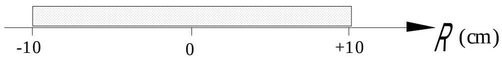
<u>Exercício 29</u>: Mostre que, para se fabricar uma latinha fina cilíndrica (fechada nas duas tampas) utilizando a menor quantidade possível de chapa metálica, a altura deve ser igual ao diâmetro. Quais as dimensões de uma latinha de 350ml fabricada de acordo com essa razão de aspecto?

<u>Exercício 30</u>: A concentração de um poluente na atmosfera, acima de uma certa cidade, é dada por

$$C(h) = 5he^{-h/50} \qquad \begin{cases} \text{h em metros} \\ \text{C em ppm} \end{cases}$$

Em que altura h a concentração do poluente é máxima? Qual o valor dessa concentração máxima? *(respostas com 2 significativos)*

Exercício 31: A concentração de Arsênico ao longo de uma barra metálica de 20cm de comprimento é dada por:



$$P(\ell) = \frac{e^{-\frac{\ell+10}{4}} + Ae^{\frac{\ell-10}{3}}}{B} \qquad \begin{cases} \ell \ \text{em cm} \\ P \ \text{em ppm} \end{cases}$$

(a) Obtenha A e B de modo que a concentração mínima ocorra no meio da barra e seja de 2ppm.
(b) Nessas condições, qual será a concentração de Arsênico em cada uma das extremidades da barra?

(respostas com 4 significativos)

Exercício 32: Em uma barra metálica semelhante à do exercício anterior, os valores de A e B são A=2,0 e B=0,08.
(a) Em qual posição da barra a concentração de As é mínima?
(b) Qual o valor dessa concentração mínima?
(c) Qual a concentração de As nos extremos da barra?

(respostas com 2 significativos)

LIMITES FUNDAMENTAIS

Alguns limites importantes podem ser calculados apenas por inspeção ou efetuando uma fatoração simples.

Exercício 33: Determine os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+3}{2x^2-3x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3+3}{2x+1}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{2x^2+1}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{x^2+x}$ (g) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$ (h) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{x^3+1}$ (i) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ (j) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ (k) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-e^{-x}}{e^x-1}$

Certos limites podem ser obtidos pela regra de L´Hôpital (que foi, na verdade, obtida por J.Bernoulli em 1694): Se f(x) e g(x) são diferenciáveis em um intervalo aberto (a,b) contendo c, e se f/g tem a forma indeterminada 0/0 ou ∞/∞ em c, então

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

, contanto que esses limites existam.

Exercício 34: Determine os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos(3x)}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$ (d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$ (f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(x)+5x-1}{2x}$ (g) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{1-\cos(3x)}$

RESPOSTAS

Exercício 1: (a) $f'(x) = 6x - 2 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (b) $g'(x) = 15\left\{(2x+5)\sqrt{x} + (x^2+5x+8)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$ (c) $h'(x) = 5\dfrac{9x^2 + 24x\sqrt{x} + 4}{(2+\sqrt{x})^2}$

Exercício 2: (a) 14 cm/s (b) $180\text{cm}^2/\text{s}$ (c) $S´(0) = 180\text{cm}^2/\text{s}$; $S(1) = 792\text{cm}^2$; $S(0) = 600\ \text{cm}^2$; variação de $192\ \text{cm}^2$
a diferença de 12cm^2 foi devido ao uso do valor da taxa no instante t = 0.
Em outras palavras, a *taxa média* de variação foi de $192\text{cm}^2/\text{s}$, enquanto que a taxa no intante t = 0 é de $180\text{cm}^2/\text{s}$.

(d) 0,0667 por segundo (e) $\left.\begin{matrix} A = 20+4t \\ B = 30+3t \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} \text{A e B em cm} \\ \text{t em segundos} \end{matrix}$ (f) $S´(t) = 180 + 24t$ $\begin{cases} S´ \text{ em } \text{cm}^2/\text{s} \\ t \text{ em s} \end{cases}$ $r´(t) = \dfrac{60}{(30+3t)^2}$ $\begin{cases} t \text{ em s} \\ r´ \text{ em } s^{-1} \end{cases}$

(g) $h´(t) = \dfrac{170+25t}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $h´(0) = 4{,}7\text{cm/s}$

Exercício 3: (a) $f'(x) = 3$ (b) $f'(x) = 2x - 3$ (c) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$ (d) $f'(x) = -\dfrac{5}{x^2}$ (e) $f'(x) = -\dfrac{12}{x^3} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (f) $f'(x) = 35x^6 - 36x^5 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

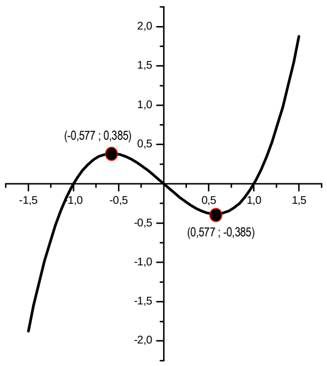
Exercício 4: (a) 20m; 11,7m; 5m; 20m; 31,7m (b) −0,25m/s ; 0,167m/s; 0; 0,583m/s (c) $v(t) = \dfrac{t}{120} - \dfrac{1}{2}$ $\begin{cases} t \text{ em segundos} \\ v \text{ em m/s} \end{cases}$

(d) 0,5m/s; −0,333m/s; 0; 0,5m/s; 0,667m/s (e) $a = \dfrac{1}{120}\ \text{m/s}^2$ (f) 245m

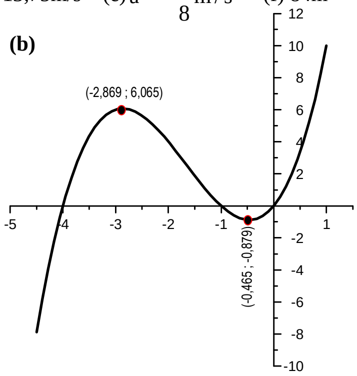
Exercício 5: (a) 43,75m; 93,75m; 43,75m; −406,25m; −656,25m (b) 0 ; −6,25m/s; −3,75m/s; −12,5m/s (c) $v(t) = -\dfrac{t}{8} + \dfrac{15}{4}$ $\begin{cases} t \text{ em segundos} \\ v \text{ em m/s} \end{cases}$

(d) 3,75m/s; 1,25m/s; −3,75m/s; −11,25m/s; −13,75m/s (e) $a = -\dfrac{1}{8}\ \text{m/s}^2$ (f) 84m

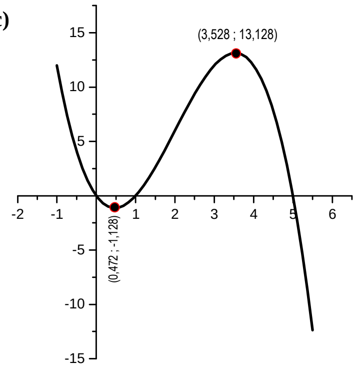
Exercício 6: **(a)**



(b)

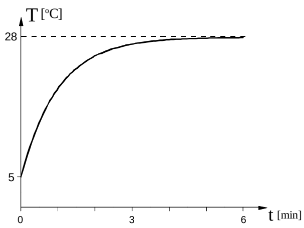


(c)



Exercício 7: (a) $f'(x) = 10(2x-1)^4$ (b) $f'(x) = 30(15-7x)(7-2x)^2(3x-1)^3$ (c) $f'(x) = \dfrac{4(3x-1)}{\sqrt{3x^2-2x+5}}$ (d) $f'(x) = 21\dfrac{2x^2-2x-1}{(2-x)^4}$

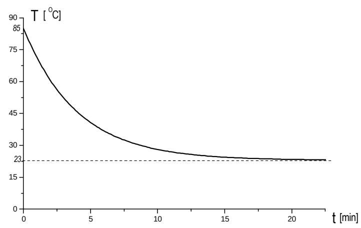
Exercício 8: (a) 33,0 litros/minuto (b) 65,2 l/min (c) 0
Exercício 9: 333 metros por mês
Exercício 10: (a) 2,718 (b) 0,3679 (c) 7,389 (d) 0,1353 (e) 20,09 (f) 0,04979 (g) 1,284 (h) 0,7788 (i) 1,000 (j) $4{,}852\times10^8$ (k) $2{,}061\times10^{-9}$ (l) 4,113 (m) 0,7536
Exercício 11: (a) $f(x)=e^{3x}$ (b) $g(x)=e^{5x/3}$ (c) $h(x)=e^{-2x}$ (d) $m(x)=e^{7x/2}$
Exercício 12: $f(x) = x^n e^{-x}$ tem máximo em x = n, com valor $f(n) = n^n e^{-n}$.
xe^{-x} tem máximo em (1 ; 0,37); x^2e^{-x} tem máximo em (2 ; 0,54); x^3e^{-x} tem máximo em (3 ; 1,34)
Exercício 13: (a) $f(t) = 5+15e^{-t}$ e $f(t) = 15-10e^{-t/2}$ (b) −15 e 5
Exercício 14:



(b) $T_{ambiente} = T(\infty) = 28^oC$
(c) $T´(0) = 23^oC/min$
$T´(20s) = 16{,}5^oC/min$
$T´(2min) = 3{,}11^oC/min$

$T´= 28-T \Rightarrow 2^oC/min$

Exercício 15:



(b) $T_{inicial} = T(0) = 85^oC$ $T_{ambiente} = T(\infty) = 23^oC$
(c) $T´(0) = -15{,}5^oC/min$
$T´(2min) = -9{,}4^oC/min$
$T´(10min) = -1{,}3^oC/min$
$T´ = 23 - 4T$; $T=25^oC \Rightarrow T´ = -0{,}5^oC/min$
(d) $T=23{,}2^oC \Rightarrow t = 22min57s$
(e) $T´ = 0{,}1^oC/s \Rightarrow t = 3min48s$

Exercício 16: (a) 0,3010 (b) 0,6931 (c) 2,197 (d) 2,197 (e) 3,689 (f) 3,689 (g) 0,5390 (h) 0,5390 (i) 0,1505 (j) 0,1505
Exercício 17: (a) 2,322 (b) 0,6055 (c) 0,5108 (d) −0,9163 (e) 0,4343
Exercício 18: (a) 0,9803 (b) −0,9803 (c) 2,5897 (d) 3,8626
Exercício 19: (a) $f'(x) = 1/x$ (b) $f'(x) = -4e^{-2x} + 5/x$ (c) $f'(x) = 6x^2 + e^{-5x} - 1/x$ (d) $f'(x) = 1 + \ln(x)$ (e) $f'(x) = \{1 - \ln(x)\}/x^2$ (f) $f'(x) = x + 2x.\ln(x)$

Exercício 20: (a) 5m ; 5,97m ; 7,72m ; 18,0m ; 19,3m (b) $v(t) = 3e^{-t/5}$ $\begin{cases} t \text{ em minutos} \\ v \text{ em m/min} \end{cases}$ (c) 3,00 ; 2,81 ; 2,46 ; 0,406 ; 0,131 (m/min)

(d) $a(t) = -\dfrac{3}{5}e^{-t/5}$ $\begin{cases} t \text{ em minutos} \\ a \text{ em m/min}^2 \end{cases}$ (e) -0,600 ; -0,561 ; -0,491 ; -0,0812 ; -0,0279 (m/min^2) (f) 10m

Exercício 21: (a) ≅ 140 dias (b) ≅ 2 anos e 6 meses
Exercício 22: aproximadamente quinze mil e setecentos anos.

Exercício 23: (a) f´(x) = 40cos(8x-40) (b) f´(t) = 12cos(3t) - 36.t.sen(3t) (c) $f´(t) = \dfrac{2t\cos(2t) - \text{sen}(2t)}{t^2}$

(d) $f´(z) = -e^{-z/5}[\cos(5\pi z + 40^o) + 25\pi\,\text{sen}(5\pi z + 40^o)]$ (e) $f´(x) = 168\cos(3x)\text{sen}^7(3x)$

Exercício 24: 4,03 cm/grau **Exercício 25:** 6,63cm/grau **Exercício 26:** 4,5km/h

Exercício 27: (a) A = 50 e $\phi = -36^o52'$; (b) A = 33,6 e $\phi = -23^o17'$; (c) A = 7,98 e $\phi = 217^o49'$;

Exercício 28: (a) $f(t) = 20\cos(10\pi t - 66^o25')$ (b) $f(t) = 10\cos(200\pi t + 143^o8')$ (c) $f(t) = 50\cos\left(\frac{2\pi}{15}t + 66^o25'\right)$

Exercício 29: 7,64cm de diâmetro e 7,64cm de altura
Exercício 30: 50m; 92ppm
Exercício 31: (a) A=1,726 e B=0,07182 (b) 13,95ppm e 24,12ppm
Exercício 32: (a) – 0,25cm (b) 1,9ppm (c) 13ppm e 25ppm
Exercício 33: (a) 2 (b) 2,5 (c) $-\infty$ (d) 0 (e) 0 (f) 1 (g) 2 (h) 1/3 (i) 2 (j) −1 (k) 1
Exercício 34: (a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 1 (e) 0 (f) 2,5 (g) 8/9
