

# CÁLCULO INTEGRAL

1º Semestre de 2013

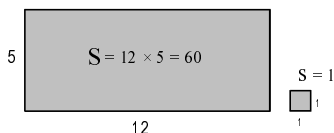
Prof. Maurício Fabbri

© 2004-13

## 1ª Série de Exercícios : Integração

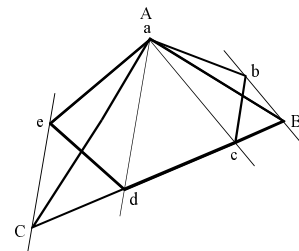
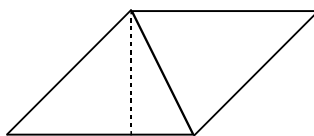
### O CÁLCULO DE ÁREAS

- (I) Área é a medida de um espaço de duas dimensões. O valor da área significa quantas vezes esse espaço é maior do que uma medida padrão. Disso decorre que a área de uma região retangular é simplesmente o produto da medida dos lados (base  $\times$  altura) :

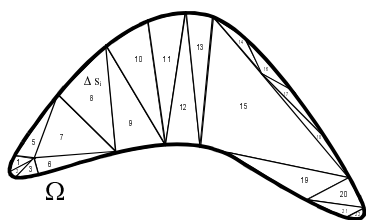


Note que não é necessário que os lados tenham medidas inteiras. A área de um retângulo de lados 1,34 e 2,59 é 3,4706. (é importante que voce reflita e se convença claramente disto!). A situação fica um pouco mais complicada se alguma medida for irracional (por exemplo,  $\sqrt{2}$  ou  $\pi$ ), mas com um pouco mais de reflexão voce se convencerá de que as contas continuam válidas mesmo nesses casos.

- (II) É fácil demonstrar que a área de um paralelogramo é também o produto de um de seus lados pela distancia entre os outros dois (altura), e então que a área do triângulo é metade do produto entre a base e a altura. A área de uma figura plana com lados retos pode ser facilmente encontrada dividindo-a em triângulos. Pode-se prontamente desenhar um triângulo com a mesma área de uma figura plana qualquer que tenha lados retos.



- (III) A área de uma região que não é delimitada apenas por segmentos de reta deve ser encontrada por um processo de limite: dividimos a figura em regiões cada vez menores e mais numerosas, e o valor da área é o limite da soma dessas pequenas áreas quando o número delas fica cada vez maior. Os computadores calculam o valor da área de uma região qualquer por aproximação, dividindo a figura em um número adequado de figuras menores com lados retos.

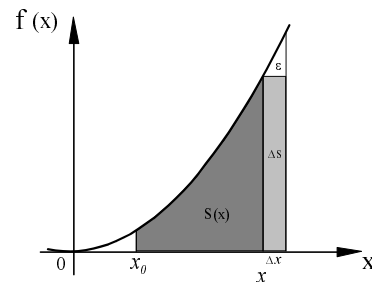


$$S \cong \sum \Delta S_i$$

$$S = \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum \Delta S_i = \int_{\Omega} dS$$

- (IV) A área delimitada pelo gráfico de uma função conhecida pode ser encontrada usando o cálculo diferencial, como segue.

Seja  $S(x)$  a área sob o gráfico da função  $f(x)$  a partir de um ponto de referência  $x_0$ , até o ponto  $x$ . Se  $x$  aumenta de  $\Delta x$ , a área  $S(x)$  aumenta de  $\Delta S$ . Um valor aproximado de  $\Delta S$  é a área do retângulo de lados  $\Delta x$  e  $f(x)$ , de modo que  $\Delta S \cong (\Delta x) \cdot f(x)$ . Supondo que o erro  $\epsilon$  dessa aproximação tenda a zero quando  $\Delta x$  fica cada vez menor, no limite  $\Delta x \rightarrow 0$  teremos  $\frac{dS}{dx} = f(x)$ . A função  $S(x)$  fica determinada pelas relações:



$$\begin{cases} \frac{dS}{dx} = f(x) \\ S(x_0) = 0 \end{cases}$$

Dizemos que  $S(x)$  satisfaz um problema de valor inicial.  $S(x)$  satisfaz a equação diferencial  $S'(x) = f(x)$  e a condição inicial  $S(x_0) = 0$ .

Portanto, a derivada da função  $S(x)$  é a função conhecida  $f(x)$ .  $S(x)$  é chamada de primitiva de  $f(x)$ .

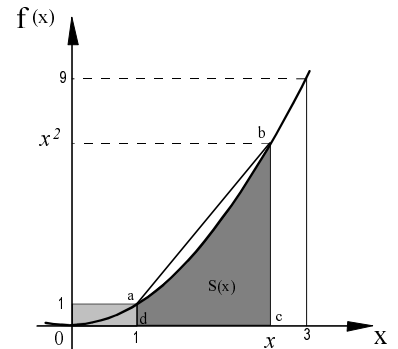
EXEMPLO: Seja encontrar a área sob o gráfico de  $f(x) = x^2$  entre  $x=1$  e  $x=3$ .

Definindo  $S(x)$  a área a partir de  $x=1$  até  $x$ , teremos  $\begin{cases} \frac{dS}{dx} = x^2 \\ S(1) = 0 \end{cases}$ .

Portanto,  $S(x) = \frac{x^3}{3} + K$ , e o valor de  $K$  deve ser  $-1/3$  para que

$S(1)=0$ . Logo,  $S(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$  e  $S(3) = 26/3 \cong 8,67$ . Note que a área

pedida é aproximadamente 8,7 vezes a área do retângulo  $1 \times 1$  marcado na figura, e é menor que a área do trapézio  $abcd$ , que vale 10.

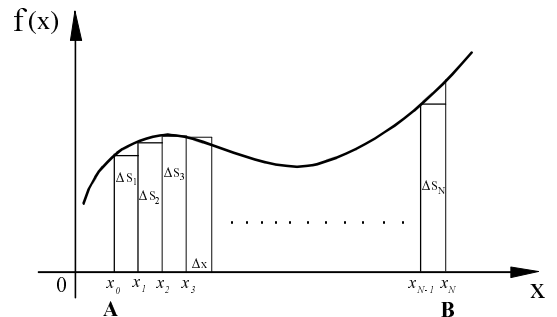


(V) (o cálculo de áreas como limites de somas infinitas) Para calcular a área  $S$  sob o gráfico de uma função  $f(x)$  entre  $x=A$  e  $x=B$ , (1) dividimos  $S$  em um número  $N$  de pequenas áreas  $\Delta S_i$ ; (2) calculamos cada pequena área de modo que o erro tenda a zero quando ela ficar cada vez menor, e (3) calculamos o limite da soma das áreas  $\Delta S_i$  à medida em que o número delas aumenta e cada uma fica cada vez menor. Esse processo está esquematizado abaixo quando dividimos o intervalo  $[A,B]$  por uma malha uniforme de largura  $\Delta x = \frac{B-A}{N}$ .

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_N = \sum_{i=1}^N \Delta S_i$$

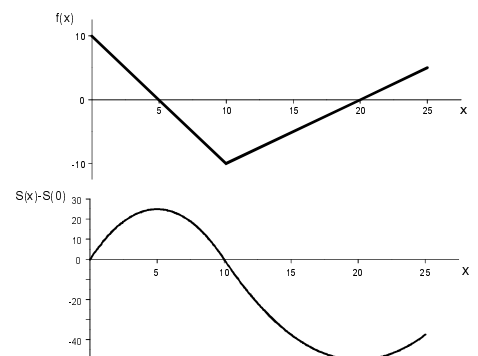
$$S \cong f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{N-1}) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$S = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_A^B f(x) \cdot dx$$



Riemann desenvolveu um método que permite obter o valor da área mesmo em casos onde a função  $f(x)$  apresenta um número finito de descontinuidades finitas (“saltos” finitos) no intervalo  $[A,B]$ ; por esse motivo, a integral usualmente empregada é chamada de “integral de Riemann”.

(VI) A área, como definida acima, tem sinal algébrico, uma vez que  $\Delta S$  tem o mesmo sinal de  $f(x)$ . Na figura ao lado, o gráfico inferior representa o valor da área sob  $f(x)$  a partir do ponto  $x = 0$ . Observe que  $f(x) = \frac{dS}{dx}$ .



---

## O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

---

$$f(B) - f(A) = \int_A^B f'(x) dx$$

⇒ para calcular a integral de  $f(x)$ , "basta" encontrar sua primitiva e calcular a variação desta entre os extremos de integração.

**Exercício 1:** Calcule a área sob o gráfico de  $f(x) = x^2$  entre  $x = 2$  e  $x = 5$ .

Algumas primitivas são fáceis de encontrar, por exemplo:

$$\int x^N dx = \frac{x^{N+1}}{N+1} \quad (N \neq -1) \quad ; \quad \text{para } N=0 \text{ obtemos } \int dx = x \quad (\text{óbvio !!!})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad \int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) \quad \int \cos(x) dx = \sin(x)$$

(as primitivas são definidas a menos de uma *constante de integração*)

---

### PROPRIEDADES

---

$$\int_A^B + \int_B^C = \int_A^C, \text{ e, portanto, } \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$
$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \quad (\textit{linearidade})$$

**Exercício 2:** Calcule a área sob o gráfico das funções no intervalo indicado. Quando a resposta não for um número comum, escreva-a com três significativos.

(a)  $f(x) = 2x - 1$  entre  $x = 0$  e  $x = 3$

(b)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  entre  $x = 1$  e  $x = 2$

(c)  $f(x) = 50e^{-2x}$  entre  $x = 0$  e  $x = 1$

(d)  $h(t) = 10\cos(\pi t/5)$  entre  $x = 0$  e  $x = 2$

(e)  $v(t) = 20e^{-t/4}$  entre  $t = 0$  e  $t = 8$

(f)  $w(x) = \frac{5}{x}$  entre  $x = 1$  e  $x = 2$

(g)  $g(x) = \sqrt{x}$  entre  $x = 0$  e  $x = 1$

---

### USO DE TABELAS

---

Encontrar a primitiva pode exigir uma boa dose de arte, técnica e esperteza matemática. Em um bom número de casos importantes, nem sequer é possível escrever a primitiva em termos de funções elementares. As tabelas de integrais listam as primitivas conhecidas que são mais importantes.

**Exercício 3:** Sabendo que  $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2} e^{ax}$

encontre, com três significativos,

(a) a área sob a função  $f(t) = 20e^{-3t} \cos(3\pi t)$  entre  $t = 0$  e  $t = 1$

(b) a área total sob a função  $f(t) = 5e^{-20t} \cos(10\pi t)$  para  $t > 0$  (entre  $t = 0$  e  $t \rightarrow \infty$ )

**Exercício 4:** Encontre a área sob  $f(t) = \frac{10t}{t^3 + 20}$  para  $t > 0$  (entre  $t = 0$  e  $t \rightarrow \infty$ ), com três significativos.

$$\text{Dado (tabela): } \int_0^{\infty} \frac{x^m}{x^n + a^n} dx = \frac{\pi a^{m+1-n}}{n \cdot \text{sen} \left[ \frac{(m+1)\pi}{n} \right]} \quad (0 < m+1 < n)$$

**Exercício 5:** Calcule  $20 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^8(t) dt$  com três significativos, sabendo que

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2m}(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m}(x) dx = \frac{1.3.5 \dots (2m-1) \pi}{2.4.6 \dots (2m) 2}$$

---

### TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR MUDANÇA DE VARIÁVEL

---

Muitas integrais podem ser transformadas em outras mais simples através de uma mudança na variável de integração.

**Exercício 6:** Calcule  $I = \int_0^{\pi/2} e^{\text{sen}x} \cos(x) dx$  com três significativos, utilizando a transformação  $u = \text{sen}(x)$ .

**Exercício 7:** Calcule  $I = \int_0^{\pi/4} \cos^4(2x) dx$  com três significativos, fazendo  $u = 2x$ . (veja dado do Exercício 5)

**Exercício 8:** Calcule  $I = 10 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3(x) \cos(x) dx$  com três significativos, utilizando a transformação  $u = \text{sen}(x)$ .

**Exercício 9:** Calcule  $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \text{sen}^2 x} \text{sen}(2x) dx$  com três significativos, fazendo  $u = 1 + \text{sen}^2(x)$  e lembrando que  $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$ .

---

### A INTEGRAL DE 1/x TÉCNICA DAS FRAÇÕES PARCIAIS

---

**Exercício 10:** Obtenha o valor das integrais abaixo com três significativos:

$$(a) \int_3^4 \frac{5}{x-2} dx \quad (b) \int_{-7}^{-6} \frac{10}{x+5} dx$$

**Exercício 11:** (a) Escreva  $f(x) = \frac{2}{x(x-1)}$  na forma  $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$  (encontre A e B).

- (b) Encontre a área sob o gráfico de  $f(x)$  entre  $x = 1,5$  e  $x = 2$  com três significativos.  
 (c) Encontre a área sob o gráfico de  $f(x)$  entre  $x = 0,2$  e  $x = 0,8$  com três significativos.  
 (d) Encontre a área sob o gráfico de  $f(x)$  entre  $x = -0,6$  e  $x = -0,2$  com três significativos.

**Exercício 12:** Calcule  $\int_{-1,8}^{-0,9} \frac{10}{x(x-1)(x+2)} dx$  com três significativos.

---

### A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

---

Da regra de derivação do produto, podemos deduzir a seguinte igualdade:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Isto pode ser aplicado no cálculo de integrais aonde o integrando é um produto de duas funções, uma das quais tem uma derivada simples, e a outra tem uma primitiva simples. A idéia é transformar a integral em outra mais fácil.

**Exercício 13:** Calcule  $\int_0^1 x e^x dx$ , por partes, utilizando  $u = x$  e  $dv = e^x dx$ .

**Exercício 14:** Mostre que  $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$ .

*Primeiro aplique a transformação  $u = \ln(x)$ , e em seguida a integração por partes análoga ao exercício 13.*

**Exercício 15:** Calcule  $\int_0^{\pi/3} x \sin(x) dx$ , por partes, utilizando  $u = x$  e  $dv = \sin(x) dx$ . (três significativos)

**Exercício 16:** Calcule  $\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t} dt$ , aplicando a técnica de integração por partes duas vezes em seguida.  
(três significativos)

---

### APLICAÇÕES DO CÁLCULO INTEGRAL

---

(VII) Se  $x(t)$  representa a posição de um móvel, então sua velocidade é  $v = \frac{dx}{dt}$  e a aceleração é  $a = \frac{dv}{dt}$ .

Portanto,  $dx = v \cdot dt$  e  $dv = a \cdot dt$ . A área sob o gráfico de  $v \times t$  é o deslocamento sofrido pelo móvel e a área sob o gráfico de  $a \times t$  é a mudança de velocidade no intervalo considerado.

**Exercício 17:** Um automóvel se desloca a partir do instante  $t = 0$  de modo que sua velocidade  $v$ , em km/h, varia com o tempo  $t$  em minutos de acordo com  $v = 4,8t(10-t)$ . Qual a distância total percorrida nos primeiros dez minutos? (*cuidado com as unidades !!!*) - reposta com três significativos -

(VIII) Se  $\phi(t)$  é a vazão de água por um cano, então  $\phi = \frac{dq}{dt}$ , onde  $q$  é a quantidade de água que atravessa uma seção transversal do cano. A área sob o gráfico de  $\phi \times t$  é a quantidade total de água que passou pelo cano.

**Exercício 18:** Uma bomba retira gasolina de um reservatório de modo que a vazão aumenta com o tempo de acordo com  $\phi = k\sqrt{t}$ . Qual o valor de  $k$  de modo que essa bomba esvazie um reservatório de 3000 litros em cinco minutos? - reposta com dois significativos -

(IX) Se  $i(t)$  é a corrente elétrica através de um fio condutor, então  $i = \frac{dq}{dt}$ , onde  $q$  é a quantidade de carga que atravessa uma seção transversal do fio. A área sob o gráfico de  $i \times t$  é a quantidade total de carga que passou pelo fio.

**Exercício 19:** Uma bateria é carregada através de uma corrente elétrica que decai exponencialmente com o tempo, de acordo com  $i(t) = 2e^{-t/15}$ . A corrente é dada em ampères ( $1A = 1C/s$ ) e o tempo em minutos. A bateria estará carregada após a corrente ter praticamente zerado. Qual a quantidade de carga na bateria quando estiver totalmente carregada? (*cuidado com as unidades !!!*)

(X) A densidade de um fio não-homogêneo varia com a posição  $x$ . Se um trecho  $dx$  do fio tem massa  $dm$ , então a densidade nesse local do fio é  $\lambda = \frac{dm}{dx}$ . A massa total do fio é a área sob o gráfico de  $\lambda(x)$ .

**Exercício 20:** Uma certa barra não-homogênea de comprimento  $L$  tem densidade máxima em seu ponto médio, descrita por  $\lambda(x) = k(L^2/4 - x^2)$ , onde  $x$  varia de  $-L/2$  a  $+L/2$  (o ponto médio da barra é colocado na posição  $x = 0$ , por conveniência).

(a) Qual o valor de  $k$  em função do comprimento  $L$  da barra e de sua massa total  $M$  ?

(b) Qual a posição do centro de massa da metade direita dessa barra?

*Sugestão: divida a barra em pedacinhos  $\Delta x$ , cada um com massa  $\Delta m$ , e calcule o centro de massa do conjunto. Exprima o resultado na forma de um somatório, e depois obtenha uma integral fazendo o limite  $\Delta x \rightarrow 0$ .*

---

## RESPOSTAS

1. 39
2. (a) 6 (b)  $-1/6$  (c) 21,6 (d) 15,1 (e) 69,2 (f) 3,47 (g)  $2/3$
3. (a) 0,644 (b) 0,0721
4. 4,45
5. 8,59
6. 1,72
7. 0,295
8. 2,50
9. 1,22
10. (a)  $5\ln 2 = 3,47$  (b)  $-10\ln 2 = -6,93$
11. (a)  $A = -2$   $B = 2$  (b) 0,811 (c)  $-5,55$  (d) 1,62
12. 5,01
13. 1
15. 0,342
16.  $1/4 = 0,250$
17. 13,3km
18. 0,58 litros/s<sup>1,5</sup>
19. 1800 C
20. (a)  $k = 6M/L^3$  (b)  $3L/32$  (c)