CÁLCULO AVANÇADO

1º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

ATIVIDADES PRELIMINARES

Introdução às séries infinitas

Observe a soma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \ldots$$

O que isso quer dizer?

Significa que devemos somar as frações, somar sempre, sem parar nunca?

Isso não faz sentido, certo? Simplesmente é impossível fazer um número infinito de coisas. Não há ninguém no mundo, nem nenhum computador, que consiga somar essa série até o infinito, simplesmente por que o infinito nunca chega.

Mas há uma interpretação válida e útil, e é essa que iremos usar.

Observe que, à medida que você soma mais frações, o resultado parece estabilizar (chegar cada vez mais próximo) de um valor - de um valor que nunca chega, mas ficamos cada vez mais próximos dele. Esse valor é chamado de limite da soma. O que queremos saber é o limite de S à medida que somamos mais termos.

PROBLEMA 1: Use a calculadora para estimar, com duas casas decimais, o limite da soma

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \ldots$$

Observe a alternância de sinal de um termo para outro. Voce deve somar as frações até que não haja mais variação na segunda casa decimal.

Resposta: 0,82

PROBLEMA 2: Repita o problema anterior para a série

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$$

Voce deve somar as frações até que não haja mais variação na segunda casa decimal.

Resposta: 1,64

Se voce fez os problemas com cuidado, deve ter se surpreendido com a resposta do segundo. Para chegar a 1,64, voce precisa somar bem mais termos do que parecia ser necessário...

A soma de séries infinitas (quer dizer, encontrar o limite da soma) é uma tarefa delicada e, quase sempre, difícil. Sem contar que, na maioria das vezes, esse limite nem existe. E o que é pior, não sabemos de antemão se o limite existe ou não (mais sobre isso na aula em sala).

Um exemplo famoso é a soma $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \ldots$. Podemos encontrá-la facilmente, por dois processos.

Tome um segmento de tamanho 1. Divida o segmento em dois. Depois divida a segunda metade por dois. Divida o último quarto por dois, e assim por diante. Esse procedimento, escrito em frações, significa que

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+...$$

Portando o valor de $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+...$ é 2.

Euler bolou uma maneira rápida de achar o limite de somas como essa. Note que, nesse tipo de soma, a fração seguinte é sempre igual à anterior multiplicada por ½ . Dizemos que S é uma *série geométrica* com razão ½ . Nesse caso, Euler procedeu assim:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+...=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+...\right)$$

Então $S=1+\frac{1}{2}S$. Resolvendo esta equaçãozinha, achamos S = 2.

É claro que o método de Euler não funciona para outros tipos de série, como as que voce trabalhou nos problemas 1 e 2.

Uma palavrinha de ordem prática. Séries infinitas e limites só existem na teoria. Não dá para dividir um segmento de reta em dois sempre e sempre na prática, porque chegaremos num ponto perto dos átomos, e daí por diante nem sabemos como dividir coisas. Quando medimos algo na prática e calculamos coisas, sempre há um limite para o quanto pequenas as coisas podem ficar. Assim, somar coisas cada vez menores, numa sucessão infinita, é possível apenas na nossa imaginação. Qual a utilidade disso para um cálculo de Engenharia?

A utilidade das séries infinitas é devida exatamente a essa abstração de somar até o infinito: isso simplifica fórmulas e fornece técnicas de resolução de problemas práticos (tais como condução de calor, equalização de som, projeto de filtros, estudo de ondas e vibrações, etc.) que ficariam bem mais complicados de outro modo. É o mesmo problema de números irracionais, como $\sqrt{2}$. Na prática, sempre que medimos algo há uma precisão (resolução) máxima, e portanto poderíamos muito bem usar $\frac{141}{100}$ ou, se necessário, $\frac{7071}{5000}$ ou ainda uma fração mais precisa que essas. Mas isso torna as fórmulas mais complicadas e, o que é pior, esconde a geometria do problema.

Hoje em dia, aceitamos o infinito, mas usamos um critério para somar coisas apenas até chegar a um valor suficientemente correto do limite verdadeiro. Com um pouco de sorte, e usando alguma matemática, até podemos descobrir o valor correto do limite sem fazer a soma.

PROBLEMA 3: Use o método de Euler para encontrar as somas:

(a) $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...$

Resposta: 1,5

(b) $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-...$

Resposta: 2/3

PROBLEMA 4: Euler (que não tinha vergonha nem medo algum de errar) usou seu método para calcular
$S = 1+2+4+8+16+32+64+.....$
Que resultado encontrou? O que voce acha disso?