# CÁLCULO FUNDAMENTAL

AULAS de 06 e 13 Maio 2014

*Universidade São Francisco - Campinas/SP*
*1º sem 2014*
*Prof. Fabbri*

## FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

**Exercício 1:** Obtenha o valor das seguintes exponenciais. Se houver necessidade de arredondamento, escreva o resultado com quatro significativos.

$2^0 =$ $\quad 2^3 =$ $\quad 2^{-3} =$ $\quad 2^{5,2} =$ $\quad 2^{-5,2} =$ $\quad 2^{9,04} =$ $\quad 2^{-9,04} =$

$\pi^\pi =$ $\quad \pi^{-\pi} =$ $\quad e^e =$ $\quad e^{-e} =$ $\quad e^\pi =$ $\quad e^{-\pi} =$ $\quad e^0 =$ $\quad \pi^0 =$

$3,2^{3,2^{3,2}} =$ $\quad 3,2^{\left(3,2^{3,2}\right)} =$ $\quad 3,2^{3,2^{-3,2}} =$ $\quad 15,7^{\left(2,13^{-1,4}\right)} =$

**Exercício 2:** Verifique as propriedades:

(a) $a^x a^y = a^{(x+y)}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$ $\qquad$ (c) Se $a \neq 0$, então $a^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

## O NÚMERO *e*

$$e = 2,718281828459045235360287... = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$$

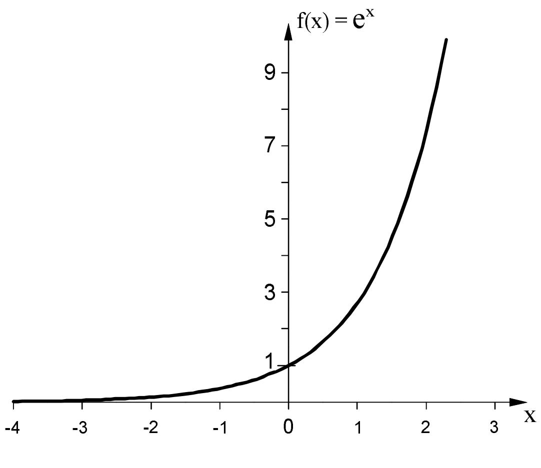
*e* é o "número de Neper", ou a "base dos logaritmos naturais ou neperianos"
*e* é um número transcendental (não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais)
(*um outro número transcendental conhecido é o* $\pi$)

**Exercício 3:** Obtenha com a calculadora os números seguintes, expressando o resultado com *quatro significativos*:

(a) e = $\quad$ (b) $e^{-1} =$ $\quad$ (c) $e^2 =$ $\quad$ (d) $e^{-2} =$ $\quad$ (e) $e^3 =$ $\quad$ (f) $e^{-3} =$

(g) $e^{1/4} =$ $\quad$ (h) $e^{-1/4} =$ $\quad$ (i) $e^0 =$ $\quad$ (j) $e^{20} =$ $\quad$ (k) $e^{-20} =$ $\quad$ (l) $e^{\sqrt{2}} =$ $\quad$ (m) $e^{-\sqrt{2}/5} =$

## A FUNÇÃO EXPONENCIAL



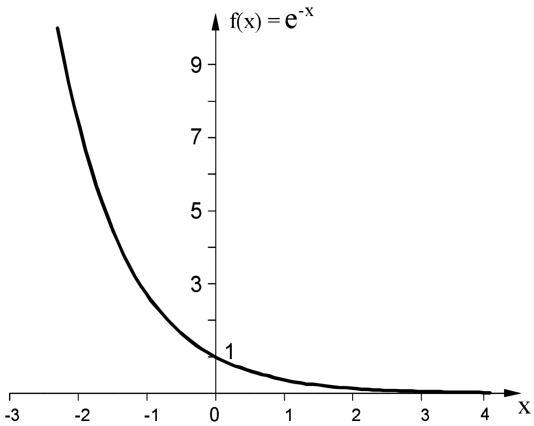

**f(x) = e^x tem as seguintes propriedades importantes**:

- é sempre crescente
- $f(x) > 0$ para todo x
- $f(0)=1$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$

- f(x) "*cresce mais rápido*" que qualquer potência de x, para x suficientemente grande:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{, para qualquer n.}$$

**f(x) = $e^{-x}$ tem as seguintes propriedades importantes:**

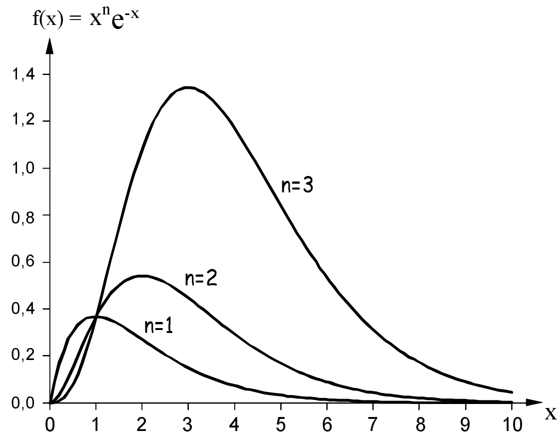



- é sempre decrescente
- f(x) > 0 para todo x
- f(0)=1
- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
- $e^{-x}$ "*é capaz de matar*" qualquer potência de x, para x suficientemente grande:
  $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$, para qualquer n.

**<u>Exercício 4</u>:** Escreva cada uma das seguintes funções como uma única exponencial:

(a) $f(x) = e^x.e^{2x}$ (b) $g(x)=e^{2x}.e^{-x/3}$ (c) $h(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{5x}}$ (d) $m(x) = \dfrac{e^{5x/2}}{e^{-x}}$

A figura ao lado mostra como a exponencial decrescente "*mata*" o crescimento de $x^n$, para n=1,2 e 3.




## A FUNÇÃO EXPONENCIAL - forma geral

Uma função exponencial decrescente é comumente escrita como $f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$,
onde a constante positiva τ é chamada de *constante de tempo*.
A é o valor inicial da exponencial (em t=0).
Um critério prático muito utilizado é que a exponencial "morre" após três constantes de tempo, ou seja, para $t > 3\tau$. Confira na calculadora a tabela abaixo:

| T | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ | 6τ | 7τ | 8τ | 9τ | 10τ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-t/\tau}$ | 0,368 | 0,135 | 0,0497 | 0,0183 | 0,00674 | 0,00248 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 | $< 10^{-4}$ |

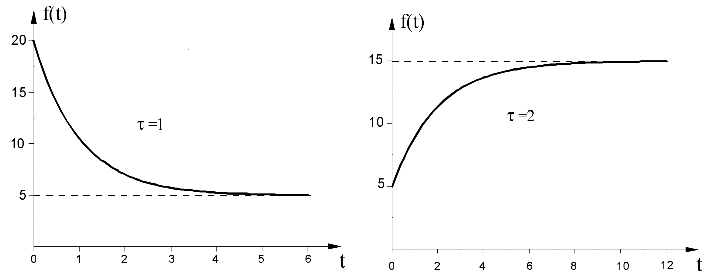
Uma exponencial decrescente pode expressar um "transiente", isto é, uma grandeza que varia com o tempo a partir de um valor inicial e tende a um valor de "regime", ou de "equilíbrio".

Se I é o valor inicial, F é o valor final e $\tau$ é a constante de tempo, um regime transiente exponencial pode ser escrito como:

$$f(t) = F + (I - F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Note que f(0)=I, f($\infty$)=F e o tempo que o transiente dura é da ordem de $3\tau$.

Exemplos:




**Exercício 5:** Escreva a fórmula de cada um dos dois transientes ilustrados na figura acima.

**Exercício 6:** Um copo de água é retirado da geladeira a 5ºC, e esquenta gradualmente até chegar à temperatura ambiente, de acordo com:

$$T(t) = 28 - 23e^{-t} \qquad \begin{cases} \text{t em minutos} \\ \text{T em } ^{o}\text{C} \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico T *versus* t.
(b) Qual o valor da temperatura ambiente?

**Exercício 7:** Um copo de água, retirado do micro-ondas, esfria gradualmente até chegar à temperatura ambiente, de acordo com:

$$T(t) = 23 + 62e^{-t/4} \qquad \begin{cases} \text{t em minutos} \\ \text{T em } ^{o}\text{C} \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico T *versus* t.
(b) Qual o valor da temperatura inicial? Da temperatura ambiente?
(c) Após quanto tempo a temperatura chegará a 23,2ºC?

## A FUNÇÃO LOG

DEFINIÇÃO : Sendo $a > 0$ e $a^b = c$ , então $b = \log_a c$
NOTE QUE $c > 0$ sempre.

Na ausência de qualquer outra indicação, log indica $\log_{10}$ e ln indica $\log_e$.

**Exercício 8:** Obtenha com a calculadora os números seguintes, expressando o resultado com *quatro significativos*:

(a) $\log(2) =$ (b) $\ln(2) =$ (c) $2*\ln(3) =$ (d) $\ln(3^2) =$ (e) $\ln(5\times8) =$ (f) $\ln(5)+\ln(8) =$

(g) $\ln(12/7) =$ (h) $\ln(12)-\ln(7) =$ (i) $\log(\sqrt{2}) =$ (j) $\frac{1}{2}\log(2) =$

Os resultados acima ilustram as propriedades mais conhecidas dos logaritmos.
Em qualquer base,

$$\log(a\times b) = \log(a)+\log(b) \quad ; \quad \log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad ; \quad \log(x^n) = n.\log(x)$$

**Mudança de base**: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

**Exercício 9**: Utilize sua calculadora para encontrar um número x tal que (*respostas com três significativos*):

(a) $2^x = 5$  (b) $\pi^x = 2$  (c) $3e^x = 5$  (d) $5e^x = 2$  (e) $10^x = e$

→ **É interessante e útil notar que** $A^{\log_A x} = x$

**Exercício 10**: Encontre o valor de x em cada uma das equações abaixo (*respostas com três significativos*):

(a) $2^{\sqrt{2}} = e^x$  (b) $2^{-\sqrt{2}} = e^x$  (c) $2^{-\sqrt{2}} = 5e^{-x}$  (d) $2^{\sqrt{2}} = 7e^{-x/4}$

**Exercício 11**: Um objeto se move sobre uma linha reta, de modo que a sua posição em função do tempo é dada por:

$$s(t) = 20 - 15e^{-t/5} \quad \begin{cases} t \text{ em minutos} \\ s \text{ em metros} \end{cases}$$

(a) Qual sua posição nos instantes 0s, 20s, 1min, 10min e 15min20s ?
(b) Em qual instante o objeto estará na posição s = 10m? E na posição s = 19m?
(*todas as respostas com três significativos*)

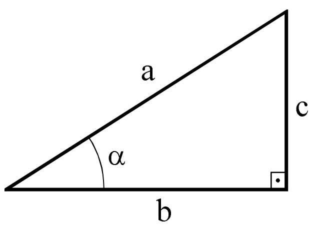
**Exercício 12**: A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que metade dos átomos de uma amostra sofra decaimento. Para uma amostra de Polônio, o número de átomos radioativos remanescentes após t dias é dado por $N_0 e^{-t/200}$, onde $N_0$ é a quantidade inicial de átomos radioativos na amostra.

(a) Qual a meia-vida do Polônio?
(b) Quanto tempo seria necessário para que restasse apenas 1% dos átomos radioativos da quantidade inicial na amostra?

**Exercício 13**: A meia-vida do Carbono 14 é de 5730 anos. Em uma amostra de madeira fossilizada, constatou-se a presença de apenas 15% do $C_{14}$ encontrado numa árvore viva. Estime a idade da amostra.

## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

### RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO




$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \tan\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

### ÂNGULOS COMUNS

| *graus* | *radianos* | seno | coseno | tangente |
|---|---|---|---|---|
| 0º | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30º | π/6 | 1/2 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| 45º | π/4 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 |
| 60º | π/3 | $\sqrt{3}/2$ | 1/2 | $\sqrt{3}$ |
| 90º | π/2 | 1 | 0 | ∞ |

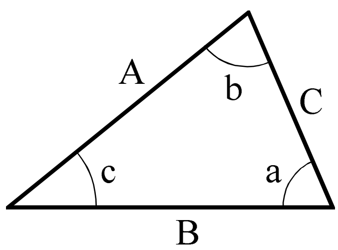
## RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}(2\alpha)=2\ \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ $\quad\cos(2\alpha)= \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$ $\quad\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

$\text{sen}(A+B) = \text{senA}\cos B + \text{senB}\cos A$ $\quad\cos(A+B) = \cos A\cos B - \text{senAsenB}$

## RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

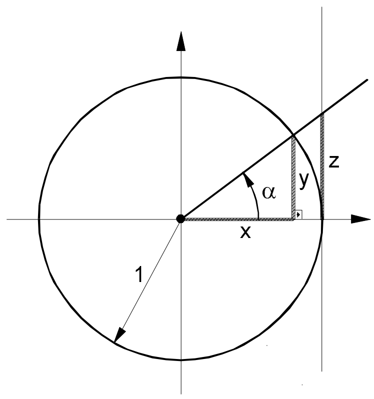



$A^2 = B^2 + C^2 - 2.B.C.\cos(a)$ *(lei dos cossenos)*

$\dfrac{A}{\text{sen}(a)} = \dfrac{B}{\text{sen}(B)} = \dfrac{C}{\text{sen}(c)}$ *(lei dos senos)*

$S = \dfrac{1}{2}A.B.\text{sen}(c)$ *(cálculo da área)*

## CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO
## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS




$y = \text{sen}(\alpha)$

$x = \cos(\alpha)$

$z = \tan(\alpha)$

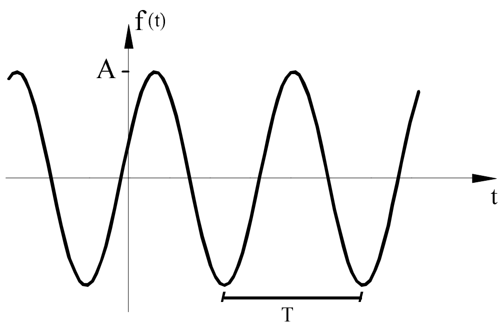
## PROPRIEDADES

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$ $\quad\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\quad\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

$\text{sen}(\alpha\pm\pi) = -\text{sen}(\alpha)$ $\quad\cos(\alpha\pm\pi) = -\cos(\alpha)$ $\quad\tan(\alpha\pm\pi) = -\tan(\alpha)$

$\text{sen}(\alpha) = \cos(\alpha-90^o)$

## FORMA GERAL

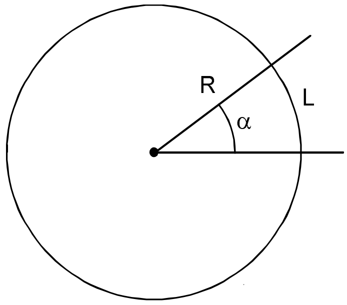



$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

A = amplitude
ω = frequencia angular
ϕ = fase

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

## A UNIDADE NATURAL DE ÂNGULOS




A medida do ângulo α é definida como a razão entre o comprimento do arco subentendido pelo ângulo e o raio de uma circunferência com vértice no ângulo:

$$\alpha = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{raio}} = \frac{L}{R}$$

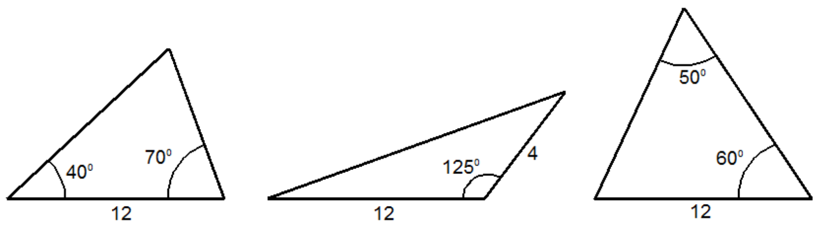
Costumamos chamar essa razão de *radiano*, mas na verdade é um número puro.

$2\pi$ rd = 360º

As funções trigonométricas simples sen(x) e cos(x) tem amplitude 1 e período $2\pi$.

**Exercício 14**: Mostre, por argumentos geométricos, que o ângulo de 1 radiano é menor que $60^0$ e maior que $45^0$.

**Exercício 15**: Resolva os triângulos abaixo.




**Exercício 16**: Para cada função abaixo, encontre o período, o valor inicial e esboce o gráfico da mesma.

(a) $f(x) = 5\text{sen}(8x - 40)$  (b) f(t) = 12.t.cos(3t)  (d) $f(z) = 5e^{-z/5}\cos(5\pi z + 40^\circ)$  (e) $f(x) = 7\text{sen}^8(3x)$

**Exercício 17:** Calcule o valor da altura em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 7 e 12.

**Exercício 18:** Calcule o valor das três alturas, das três bissetrizes internas e das três medianas dos três triângulos do exercício 16. *(respostas com 3 significativos)*

**Exercício 19:** Sabendo que tan(α) = 4, e $0^o < \alpha < 90^o$ , calcule cos(α) e sem(α).

**Exercício 20:** Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15º. Após caminhar 200 metros, ele passa a ver essa montanha sob um ângulo de 12º. Qual a altura da montanha?

**Exercício 21:** Dois observadores A e B, distantes 120m um do outro, estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver uma pedra P na outra margem. Com seus teodolitos eles medem os ângulos $P\hat{A}B$ =63º e $P\hat{B}A$ =72º. Qual a largura do rio?

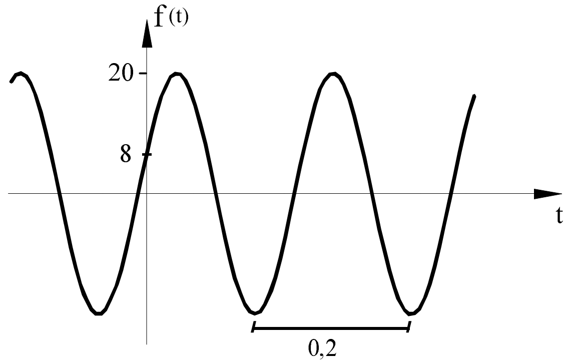
**Exercício 22:** Determine A e ϕ de modo que:

(a) 30sen(5t) + 40cos(5t) = Acos(5t+ϕ)
(b) 30cos(10πt+30º) + 40cos(10πt−45º) = Acos(10πt+ϕ)
(c) 12sen(35πt+43º) − 15sen(35πt+75º) = Acos(35πt+ϕ)

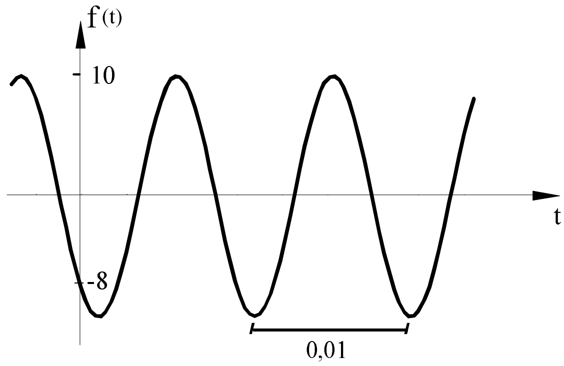
*(A deve ser positivo e especificado com três significativos, e o ângulo $\phi$ em graus e minutos)*

**Exercício 23:** Escreva a fórmula das funções senoidais abaixo na forma geral f(t) = Acos(ωt + ϕ). A amplitude deve ser positiva e especificada com três significativos, e a fase em graus e minutos; deixe a frequência angular escrita explicitamente em termos de π.

(a)




(b)




(c)