

CÁLCULO FUNDAMENTAL

AULAS de 22 e 29 ABRIL 2014

Universidade São Francisco - Campinas/SP
1o sem 2014 Prof. Fabbri

EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E ESTUDO DE FUNÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

1. Durante a discussão do sistema previdenciário, na década de 1990, aventou-se a hipótese de ser adotada a chamada "fórmula 95". Segundo ela, os trabalhadores teriam direito à aposentadoria quando a soma do número de anos trabalhados com a idade do trabalhador fosse igual a 95. Com que idade poderia aposentar-se uma pessoa que tivesse começado a trabalhar com 23 anos?
2. Resolva o sistema de inequações
$$\begin{cases} 2x - 1 < x + 3 \\ -2x + 3 < x + 6 \end{cases}$$
3. Resolva o sistema
$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$
4. Pneus novos, quando usados nas rodas dianteiras, duram 40.000km e, quando usados nas rodas traseiras, duram 60.000km. Com um jogo de 4 pneus novos, e fazendo rodízio adequado entre eles, qual o número máximo de quilômetros que um carro pode percorrer?
5. Um bar vende suco e refresco de tangerina. Ambos são preparados misturando um concentrado com água, na razão de 1 para 3, no caso do suco, e de 1 para 6, no caso do refresco. Para preparar 7 litros de refresco, a que volume de suco devemos adicionar água?
6. Esboce o gráfico e escreva a equação da retas r e s , sabendo que r passa pelos pontos (2,3) e (6,11) e s pelos pontos (1,5) e (9,-11). Em qual ponto essas retas se cruzam?
7. Escreva a equação de uma reta com inclinação 3 que passa pelo ponto (2,5). Em que ponto essa reta cruza o eixo x ? Em que ponto ela cruza o eixo y ? Suponha que os eixos se cruzem no ponto (0,0). Tome dois pontos P e Q sobre essa reta, de modo que $P(3,y)$ e $Q(x,11)$. Qual a distância entre P e Q ?
8. Se a reta $y = mx+n$ é perpendicular à reta $y = px+q$, então temos $p = -1/m$. (supondo m e p não nulos). Encontre a equação da reta que contem a altura em relação ao vértice A do triângulo ABC , dado que $A(6,9)$, $B(11,-6)$, $C(-3,1)$. Qual a medida dessa altura? Qual o valor da área do triângulo ABC ?

EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E ESTUDO DE FUNÇÕES DE SEGUNDO GRAU

9. Ao longo da borda interior de um terreno de forma quadrada, pavimentou-se uma calçada com largura de 3 metros. Restaram $625m^2$ de área sem pavimentação. Qual a área total do terreno?
10. Resolva as equações:
(a) $(3x + 1)^2 = 16$ (b) $(2x + 1)(3x - 2) = 0$ (c) $4x^2 - 3x = 0$

11. Resolva as inequações:

$$(a) (3x+1)^2 < 16 \quad (b) (2x+1)(3x-2) \geq 0 \quad (c) 4x^2 - 3x \leq 0$$

12. Observe que $(x-a)(x-b) = x^2 - sx + p$, onde $s = a+b$ e $p = ab$. Resolva, "de cabeça", as equações:

$$(a) x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (b) x^2 + x - 6 = 0 \quad (c) 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

13. Resolva as equações:

$$(a) x^2 - 5x - 24 = 0 \quad (b) 2x^2 - 3x + 5 = 0 \quad (c) (x^2 - 5)^2 - 49 = 0 \quad (d) -3x^2 - 2x + 1 = 0$$

14. Encontre dois números com soma 8 e produto 10.

15. Se dois números somam 10, qual o maior valor possível para o produto deles? Quais são os números, nesse caso?

16. Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 5x + 6$. Explícite as raízes e o ponto de máximo ou mínimo. Escreva essa função na forma fatorada. Para quais valores de x teremos $y < 0$?

17. Repita para:

$$(a) y = -x^2 + x + 2 \quad (b) y = x^2 - 8x + 16 \quad (c) y = 3x^2 + 2x + 1$$

18. Escreva a função quadrática que tem raízes em 3 e 7 e valor mínimo -10 .

19. Escreva a função quadrática que tem raízes em -3 e 7 e valor máximo 12.

20. Será possível fazer um cercado retangular com 22m^2 de área dispoendo de 18m de cerca? E um cercado circular?

21. Meu vizinho, com 20m de cerca, construiu um cercado retangular de 32m^2 de área, utilizando seu muro como um dos lados. Quanto medem os lados desse retângulo? Será que meu vizinho poderia fazer um cercado com a mesma área, ainda usando o muro como um dos lados, mas com uma cerca menor?

22. Um retângulo áureo é aquele em que a proporção p entre o lado maior e o lado menor é igual à proporção entre a soma dos lados e o lado maior. Qual o valor da proporção áurea p ? Quanto medem os lados de um retângulo áureo de área 2m^2 ?

23. Comprei umas garrafas de vinho por 540 reais. Por ter obtido um desconto de 15 reais no preço de cada garrafa, consegui comprar 3 garrafas a mais do que previra originalmente. Quantas garrafas eu comprei?

24. Resolva:

$$(a) \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = 1 \quad (b) x-1 = \sqrt{3x+15} \quad (c) x^4 + x^2 - 6 = 0$$

Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos que distam igualmente de F e de d .

25. O gráfico de $y = x^2$ é uma parábola. Encontre o foco e a diretriz.

O gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com foco em $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$

- 26.** Encontre o foco e a diretriz da parábola $y = x^2 - 5x + 6$. Seja o ponto $P(3,y)$ dessa parábola. Verifique que a distância de P ao foco é igual à distância de P à diretriz. Verifique que isso é verdade para qualquer ponto $P(x,y)$ da parábola.
- 27.** Encontre os pontos em que a reta $y = 2x + 3$ cruza com a parábola $y = x^2 - 5x + 6$.
- 28.** Encontre a reta de inclinação 2 que seja tangente à parábola $y = x^2 - 5x + 6$. Qual o ponto de tangência?
- 29.** Encontre as retas que passam pelo ponto $(4,0)$ e são tangentes à parábola $y = x^2 - 5x + 6$.
- 30.** A R\$ 30 o ingresso, os concertos de uma banda atraem 500 espectadores. Se cada variação de R\$ 1 no preço do ingresso faz variar o público em 40 espectadores, qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

BIBLIOGRAFIA

1. Lages Lima et al., "Temas e Problemas Elementares". Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 2013, e "A Matemática do Ensino Médio", Vol. 1, SBM, 2012.
-

- Respostas:** 1. 59 2. $-1 < x < 4$ 3. $x = 3$ e $y = -1$ 4. 48.000km 5. 4 litros 6. (2,3) 7. $(1/3,0)$ $(0,-1)$; $\sqrt{10}$
8. $y = 2x - 3$; $5\sqrt{5}$; 87,5 9. 961m^2 10. (a) $\{1, -5/3\}$ (b) $\{-1/2, 2/3\}$ (c) $\{0, 3/4\}$
11. (a) $-\frac{5}{3} < x < 1$ (b) $x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq \frac{2}{3}$ (c) $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ 12. (a) $\{2,3\}$ (b) $\{-3,2\}$ (c) $\{-1,-3\}$
13. (a) $\{-3,8\}$ (b) $\nexists x \in \mathbb{R}$ (c) $\pm 2\sqrt{3}$ (d) $\{-1,1/3\}$ 14. $4 + \sqrt{6}$ e $4 - \sqrt{6}$ 15. 25; 5 e 5 (iguais)
16. mínimo em $(2,5; -0,25)$ $y = (x-2)(x-3)$ $2 < x < 3$
17. (a) máximo em $(0,5; 2,25)$ $y = (x+1)(2-x)$ $x < -1$ ou $x > 2$
 (b) mínimo em $(4,0)$ $y = (x-4)^2$ para nenhum x real
 (c) mínimo em $(-1/2, 2/3)$ $y = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ para nenhum x real
18. $y = 2,5(x-3)(x-7)$ 19. $y = \frac{12}{25}(x+3)(7-x)$ 20. não; sim
21. $16\text{m} \times 2\text{m}$ ou $4\text{m} \times 8\text{m}$. Sim, $8\text{m} \times 4\text{m}$, usando apenas 16m de cerca.
22. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$; $\sqrt{\sqrt{5}+1}$ e $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ (aproximadamente $1,799\text{m} \times 1,112\text{m}$) 23. 12
24. (a) $\{3 + \sqrt{10}, 3 - \sqrt{10}\}$ (b) $\{7,-2\}$ (c) $\pm\sqrt{2}$ 25. $F(0,1/4)$ e $y = -1/4$ 26. $(2,5; 0)$ $y = -0,5$
27. $(6,541; 16,083)$ e $(0,459; 3,917)$ 28. $y = 2x - 6,25$; $(3,5; 0,75)$
29. $y = (3 + 2\sqrt{2})(x-4)$ e $y = (3 - 2\sqrt{2})(x-4)$ 30. R\$ 21,25
-