DETERMINANTES

Existem exatamente $n!$ permutações p dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$

Denotamos uma dessas permutações por $p_1 p_2 ... p_n$

Paridade da permutação: *par*, se o número de inversões que aparecem na permutação é par.
ímpar, se o número de inversões que aparecem na permutação é ímpar.

Para encontrar o número de inversões:

- para i = 1,2,...n, encontre k_i = quantidade de inteiros menores que p_i que aparecem depois de p_i
- some os k_i.

$$\text{número de inversões} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\begin{cases}1, \text{ se } p_j < p_i \\ 0, \text{ se } p_j > p_i\end{cases}$$

TEOREMA: a paridade p de uma permutação é única (par ou ímpar). Definimos a função de paridade da permutação como:

$$\sigma(p) = \begin{cases}+1 & \text{se } p \text{ é par} \\ -1 & \text{se } p \text{ é ímpar}\end{cases}$$

Dada uma matriz quadrada **A**, $n \times n$, um produto elementar de **A** é um produto de n termos, tomando um e apenas um de cada linha ou coluna (isto é, não há dois elementos da mesma linha ou coluna). Um produto elementar de **A** se escreve como $a_{1p_1} a_{2p_2} ... a_{np_n}$, onde $p_1 p_2 ... p_n$ é uma permutação dos inteiros 1,2,...,n. O produto elementar com sinal é o produto elementar multiplicado pela função de paridade da permutação correspondente, isto é, $\sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} ... a_{np_n}$.

O determinante da matriz **A** é a soma de todos os seus produtos elementares com sinal:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} ... a_{np_n}$$

<u>EXERCÍCIO 1</u> Calcule o determinante das matrizes abaixo, a partir da definição:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

<u>EXERCÍCIO 2</u> (a) Mostre que se a matriz tem uma linha ou coluna de zeros, então seu determinante é zero

(b) Mostre que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal.

(c) Qual o valor do determinante da matriz identidade $\mathbf{I}_N$?

(d) Mostre que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

PROPRIEDADES BÁSICAS

(I) Troca entre duas linhas $\Rightarrow$ o determinante muda de sinal
(II) Multiplicação de uma linha por $\alpha \Rightarrow$ o determinante fica multiplicado por α
(III) Soma α vezes uma linha a uma outra linha $\Rightarrow$ o determinante não se altera

Uma vez que $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$, essas propriedades valem também para colunas.

EXERCÍCIO 3 Exemplifique cada uma das propriedades acima, utilizando as matrizes (a) e (b) do Exercício 1.

EXERCÍCIO 4 (a) Mostre que, se alguma linha (ou coluna) de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ é uma combinação linear das outras linhas (ou colunas), então $\det(\mathbf{A}) = 0$.
(b) Mostre que, se $\det(\mathbf{A}) = 0$, então ao menos uma linha (ou coluna) é uma combinação linear das outras linhas (ou colunas).

INVERTIBILIDADE

$$\mathbf{A} \text{ é singular} \iff \det(\mathbf{A}) = 0$$
$$\mathbf{A} \text{ não é singular} \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

EXERCÍCIO 5 Para quais valores de α existe a matriz $\mathbf{A}^{-1}$?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ \alpha & 4 & -2 \end{pmatrix}$

ATENÇÃO: Determinantes pequenos não têm nada a ver com matrizes "quase-singulares"!

EXERCÍCIO 6 [*Meyer*] Discuta as matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}$ (b) $A_{ij} = \begin{cases} 0.1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad n \times n$

À medida em que n aumenta, qual o valor do determinante? Elas se aproximam de uma matriz singular?

PROPRIEDADE DO PRODUTO

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}).\det(\mathbf{B})$$

EXERCÍCIO 7 [*Meyer*] (fatoração LU)

(a) Calcule o determinante da matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, sabendo que $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, com

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & -8 \\ 0 & 5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resp.: 120

(b) Qual é o valor de $\det(\mathbf{A}^{-1})$?

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Um sólido em $\Re^n$ com faces opostas paralelas, cujas arestas adjacentes são definidas por vetores linearmente independentes $(x_1 \;\; x_2 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; x_n)$ é chamado de paralelepípedo *n*-dimensional. No $\Re^2$ é um paralelogramo (o "volume" sendo igual à área), no $\Re^3$ é um romboedro.

Se as linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$ são interpretadas como as *n* arestas de um paralelepípedo *n*-dimensional, então o volume V_n desse paralelepípedo é igual a $|\det(\mathbf{A})|$. Note que V_1 é um comprimento; V_2 é uma área, V_3 é um volume como estamos acostumados, e, para $n > 3$, V_n é um hiper-volume.

EXERCÍCIO 8 No plano cartesiano (x,y), os pontos (1,2), (2,4) e (0,3) são vértices adjacentes de um paralelogramo.

(a) Esboce esse paralelogramo no plano (x,y)

(b) Escreva a matriz $\mathbf{A}_{2\times 2}$ cujas linhas são os vetores que definem dois lados adjacentes desse paralelogramo.

(c) Calcule a área desse paralelogramo,

  i. utilizando o esboço que voce fez no item (a)

  ii. encontrando $\det(\mathbf{A})$

EXERCÍCIO 9 No espaço cartesiano (x,y,z), os pontos (0,0,0), (5,0,0), (4,3,0) e (0,2,3) são vértices adjacentes de um romboedro.

(a) Esboce esse romboedro no espaço (x,y,z)

(b) Escreva a matriz $\mathbf{A}_{3\times 3}$ cujas linhas são os vetores que definem três arestas adjacentes desse romboedro. Calcule o volume desse romboedro encontrando $\det(\mathbf{A})$

EXERCÍCIO 10 (a) Verifique, utilizando argumentos geométricos, que as três propriedades básicas dos determinantes são satisfeitas pelo volume do paralelepípedo *n*-dimensional correspondente.

(b) Verifique, utilizando argumentos geométricos, que, se ao menos uma das linhas (ou colunas) de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ é uma combinação linear das outras, então o volume do paralelepípedo *n*-dimensional correspondente é zero.

EXERCÍCIO 11 (a) Interprete geometricamente a desigualdade que o matemático Hadamard descobriu em 1893. Se **A** é uma matriz N×N, então

$$\left|\det(\mathbf{A})\right| \le \prod_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$$

(b) Seja $V = \left|\det(\mathbf{A})\right|$ e $V_0 = \prod_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$. Calcule V/V_0 para cada uma das matrizes do Exercício 1.

(c) Quando teremos $V/V_0 = 1$? E $V/V_0 = 0$?

(d) Encontre a matriz 2×2 mais simples para a qual $V/V_0 = 1$. Repita para 3×3 e 4×4.

(e) Encontre uma matriz 2×2, tal que todos os seus elementos tenham o mesmo módulo, e $V/V_0 = 1$. Repita para 3×3 e 4×4.

PRODUTO VETORIAL E PRODUTO TRIPLO NO SISTEMA CARTESIANO

No $\Re^3$, o produto vetorial $\vec{a}\times\vec{b}$ entre os vetores $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ e $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ é um vetor $\vec{v}$ que pode ser encontrado resolvendo um determinante:

$$\vec{v} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são os versores (vetores de tamanho 1) nas direções cartesianas (*x*,*y*,*z*).

O produto triplo $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ entre três vetores quaisquer também pode ser encontrado resolvendo um determinante:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIO 12 (a) Mostre que $(\vec{a}\times\vec{b}) = -(\vec{b}\times\vec{a})$

(b) Mostre que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ estão em uma mesma direção, então $(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$

(c) Verifique que o produto vetorial não é associativo, isto é, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \ne \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

(d) Mostre que $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ (portanto, $\vec{c}$ é ortogonal aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$)

(e) Interprete geometricamente o produto triplo $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

(f) Mostre que $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

(g) Verifique que $\begin{pmatrix} \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} & \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} & \hat{\imath}\cdot\hat{k} \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} & \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} & \hat{\jmath}\cdot\hat{k} \\ \hat{k}\cdot\hat{\imath} & \hat{k}\cdot\hat{\jmath} & \hat{k}\cdot\hat{k} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3$

(h) Encontre a matriz **A** tal que $\begin{pmatrix} \hat{\imath}\times\hat{\imath} & \hat{\imath}\times\hat{\jmath} & \hat{\imath}\times\hat{k} \\ \hat{\jmath}\times\hat{\imath} & \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} & \hat{\jmath}\times\hat{k} \\ \hat{k}\times\hat{\imath} & \hat{k}\times\hat{\jmath} & \hat{k}\times\hat{k} \end{pmatrix} = \mathbf{A}.\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{k} & \hat{\jmath} \\ \hat{k} & \hat{\jmath} & \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} & \hat{\imath} & \hat{k} \end{pmatrix}$

TEORIA E INTERPRETAÇÃO DO DETERMINANTE A PARTIR DAS PROPRIEDADES BÁSICAS

Vamos definir o determinante como sendo um número associado a uma matriz quadrada, det(**A**), tal que:

(I) Troca entre duas linhas $\Rightarrow$ o determinante muda de sinal
(II) Multiplicação de uma linha por $\alpha \Rightarrow$ o determinante fica multiplicado por α
(III) Soma α vezes uma linha a uma outra linha $\Rightarrow$ o determinante não se altera
(VI) $\det(\mathbf{I}_N) = 1$

EXERCÍCIO 13 Mostre, usando exclusivamente as propriedades acima, que:

(a) Se uma matriz tem uma linha de zeros, então seu determinante é zero.
(b) Se uma matriz tem duas linhas iguais, então seu determinante é zero.

TEOREMA: O determinante de uma matriz é único.

EXERCÍCIO 14 Encontre o valor do determinante de cada uma das matrizes, utilizando apenas as quatro propriedades básicas:

(a) (7) (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

TEOREMA: O determinante de uma matriz triangular superior (ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal.

EXERCÍCIO 15 Calcule o determinante de cada uma das matrizes, reduzindo as mesmas à forma triangular, por escalonamento:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -4 & -1 & -9 \end{pmatrix}$

DETERMINANTES E SINGULARIDADE DE MATRIZES

As afirmações abaixo se equivalem:

1) Uma matriz **A** é singular se e somente se não for invertível, isto é, não existir $\mathbf{A}^{-1}$.
2) Uma matriz não é singular se e somente se puder ser reduzida, por escalonamento, à matriz identidade.
3) Uma matriz **A** é singular se e somente se houver ao menos uma linha (ou coluna) que seja uma combinação linear das outras linhas (ou colunas). Isto é, as linhas (ou colunas) de uma matriz não singular são linearmente independentes.

TEOREMA: Uma matriz quadrada **A** é não-singular se e somente se det(**A**) ≠ 0.

EXERCÍCIO 16 Verifique se as matrizes são singulares, e calcule o determinante. Quando possível, obtenha a matriz inversa.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 60 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

TEOREMA: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}).\det(\mathbf{B})$

Portanto, se **A** não é singular, teremos $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

TEOREMA: $\det(\mathbf{A}^{T}) = \det(\mathbf{A})$

Portanto, em se considerando determinantes, tudo o que vale para linhas vale também para colunas.

EXERCÍCIO 17 Uma matriz **A** é ortogonal quando $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$.

(a) Quais os valores possíveis para det(**A**)? Qual é a matriz $\mathbf{A}^{-1}$?
(b) As linhas (ou colunas) de uma matriz ortogonal são vetores mutuamente ortogonais de módulo 1. Escreva uma matriz ortogonal 2×2. Escreva uma 3×3. Escreva uma 4×4 que não seja diagonal. Em cada caso, escreva a matriz $\mathbf{A}^{-1}$.

EXERCÍCIO 18 (a) Mostre que $\det(k\mathbf{A}) = k^N\det(\mathbf{A})$.

(b) Se **A** é uma matriz antissimétrica, isto é, $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, o que se pode afirmar sobre o valor de seu determinante?

TEOREMA: Seja $\mathbf{A}_i$ o vetor correspondente à i-ésima linha (ou coluna) de uma matriz **A**. Se $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i$, seja **B** a matriz obtida de **A** trocando $\mathbf{A}_i$ por $\mathbf{B}_i$, e **C** a matriz obtida de **A** trocando $\mathbf{A}_i$ por $\mathbf{C}_i$. Então det(**A**) = det(**B**) + det(**C**).

EXERCÍCIO 19 (a) Verifique o teorema acima para a matriz $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2-6 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) Repita para $\begin{pmatrix} 1 & -2+1 & 3 \\ 2 & -1+1 & 5 \\ -3 & 4+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

BIBLIOGRAFIA

1. Meyer, C.D. "*Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*". SIAM, Philadelphia, 2000.
2. Shifrin, T. e Adams, M.R. "*Álgebra Linear - uma abordagem geométrica*", 2a ed., Rio de Janeiro, LTC, 2013.
3. Anton, H. e Rorres, C. "*Álgebra Linear com Aplicações*", 8a ed., Porto Alegre, Bookman, 2001.