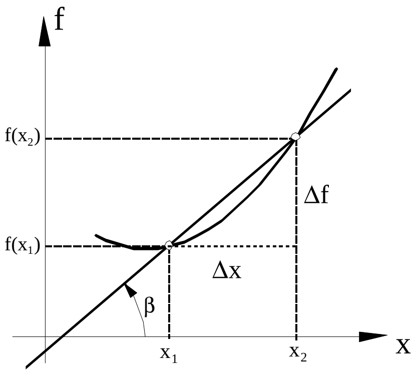
CÁLCULO I
2º Semestre de 2012
Prof. Maurício Fabbri

2ª Série de Exercícios

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

INCREMENTOS, TAXAS DE VARIAÇÃO, TANGENTES E A DERIVADA
(análise gráfica)



O *incremento* de $f(x)$ entre x_1 e x_2 é

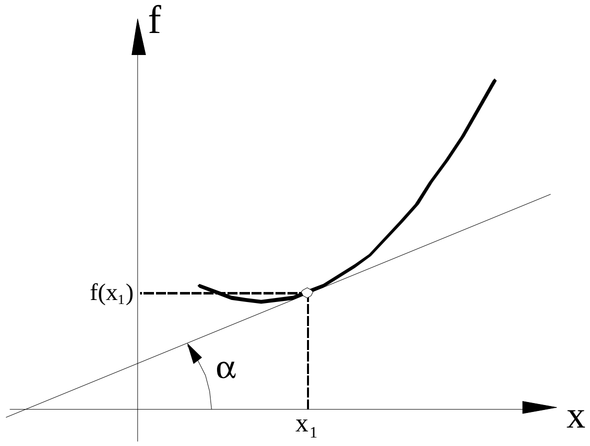
$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

A *taxa média de variação* de $f(x)$ entre x_1 e x_2 é

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan(\beta)$$

NOTE que essa taxa média depende dos pontos escolhidos.

A taxa média é igual à inclinação da secante que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.



A *taxa instantânea de variação*, ou derivada de $f(x)$ no ponto x_1 é igual à inclinação da tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$, e pode ser encontrada fazendo

$$\tan(\alpha) = \lim_{x_2 \to x_1} \tan(\beta) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Em cada ponto x, a derivada de $f(x)$ é definida como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Desse modo, dada uma função $f(x)$ definimos a sua função derivada $f'(x)$ como sendo o valor da taxa de variação de $f(x)$ no ponto x. A derivada de $f(x)$ também costuma ser escrita como $\frac{df}{dx}$. A notação de diferenciais "df" e "dx" indica que estamos trabalhando no limite $\Delta x \to 0$.

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

NOTE que, enquanto as variações "Δ" podem ser calculadas numericamente, os diferenciais "d " exprimem um limite, e não podem ser escritos ou obtidos nem calculados como diferenças numéricas "finitas".

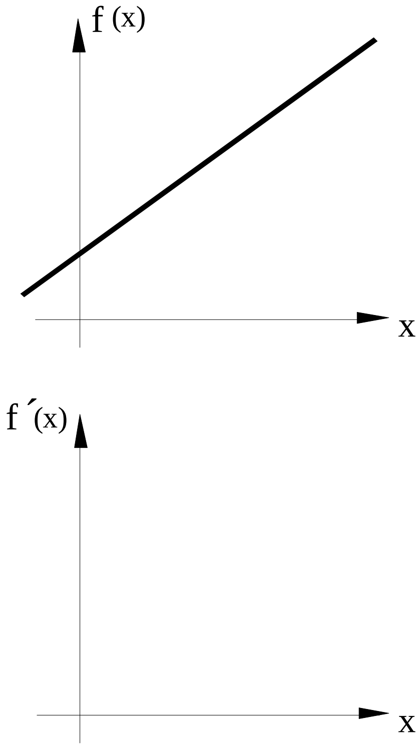
Finalmente, observe que

- $f'(x) > 0$ nos pontos onde f(x) é crescente
- $f'(x) < 0$ nos pontos onde f(x) é decrescente
- $f'(x) = 0$ nos pontos *locais* de máximo, mínimo ou de inflexão horizontal (chamados de *pontos críticos* de f).

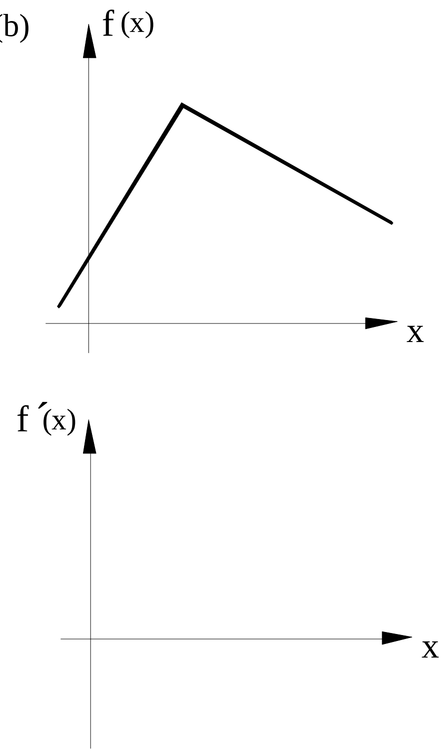
<u>Exercício 1</u>:

Em cada exemplo, esboce o gráfico de $f´(x)$.
Preste especial atenção ao sinal da derivada e aos pontos críticos da função.

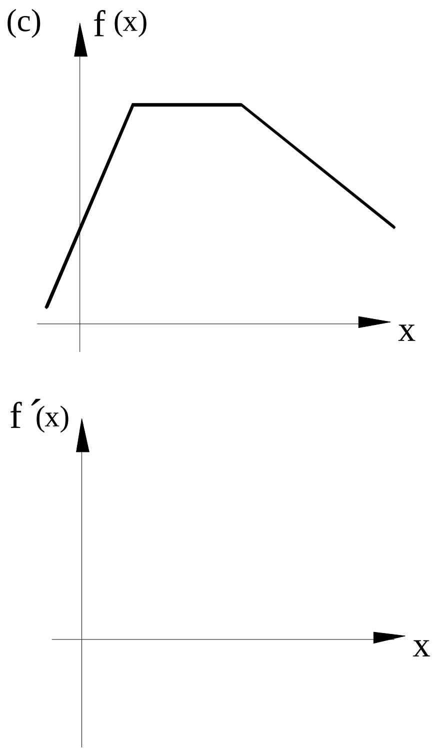
(a)



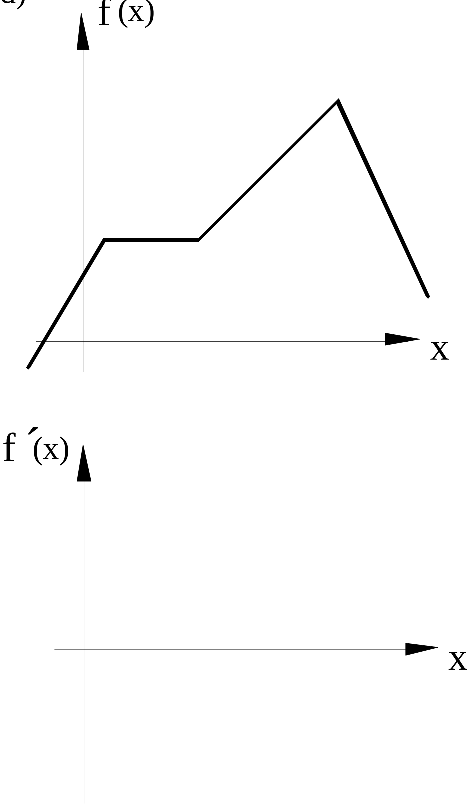
(b)



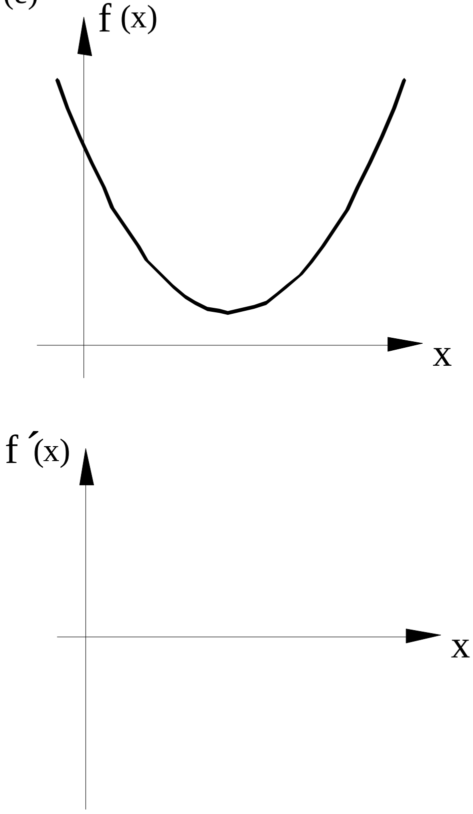
(c)



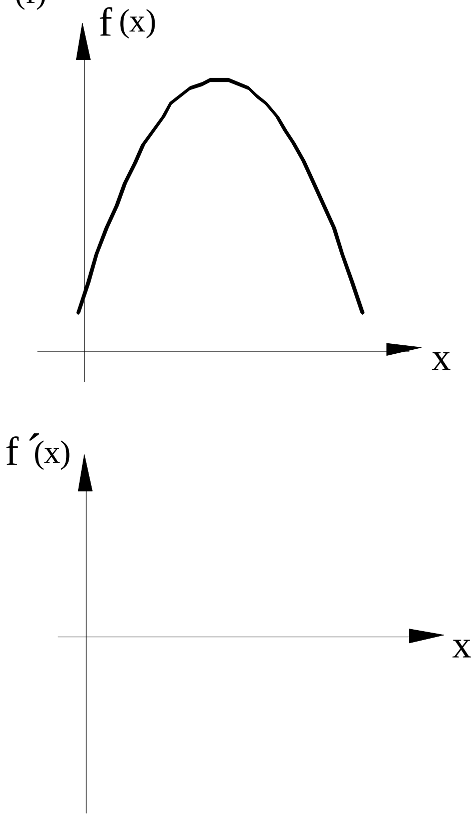
(d)

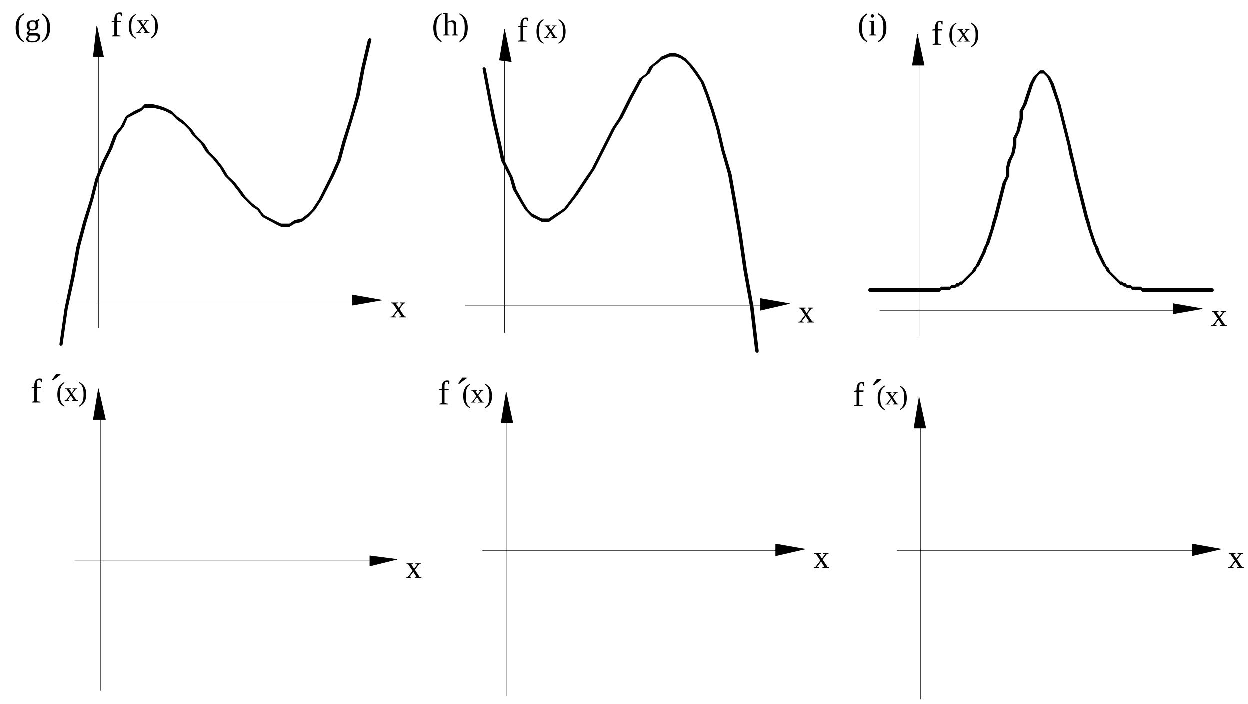


(e)



(f)

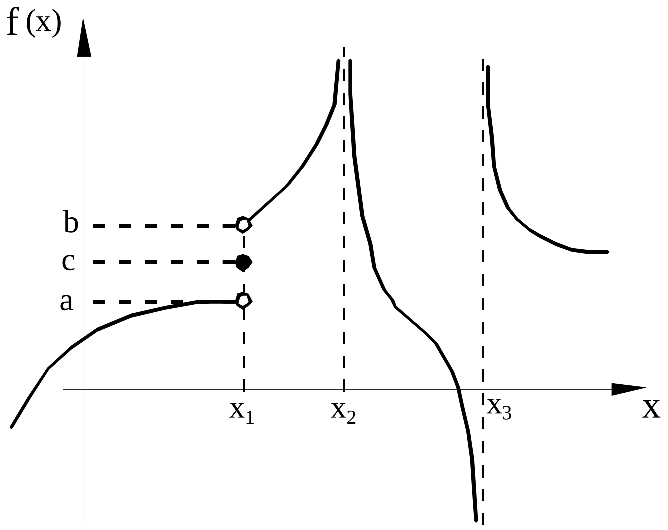




LIMITES E CONTINUIDADE

Uma função *f(x)* é contínua no ponto x_0 se e só se existe $f(x_0)$ e $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Quando uma função *f(x)* é contínua em um ponto x_0, podemos calcular $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ simplesmente substituindo *x* por x_0 na fórmula da função (a função existe em x_0, não dá "saltos" em x_0 e nem tem "infinitos" no ponto x_0).



No gráfico ao lado, vemos que

$\lim\limits_{x \to x_{1+}} f(x) = b$ $\lim\limits_{x \to x_{1-}} f(x) = a$ e $f(x_1)=c$

Portanto $\nexists \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$, *f(x)* é descontínua no ponto x_1.

Também $\nexists \lim\limits_{x \to x_2} f(x)$. Aliás, $\nexists f(x)$ para $x = x_2$.

Podemos escrever, pelo que o gráfico parece indicar, que $\lim\limits_{x \to x_{2-}} f(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x \to x_{2+}} f(x) = +\infty$.

No ponto x_3, o gráfico indica que $\lim\limits_{x \to x_{3-}} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_{3+}} f(x) = +\infty$.

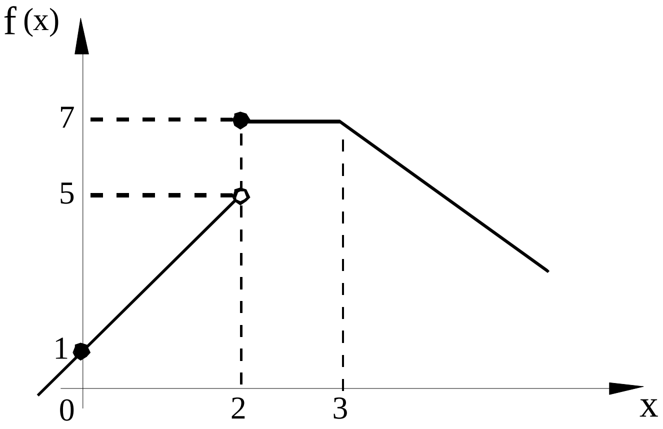
f(x) é descontínua nos pontos x_1, x_2 e x_3.

f(x) parece ser contínua em qualquer ponto $x \notin \{x_1, x_2, x_3\}$.

(dizemos "*parece ser*" porque um gráfico não é capaz de indicar todas as informações a respeito de *f(x)*).

<u>Exercício 2</u>:

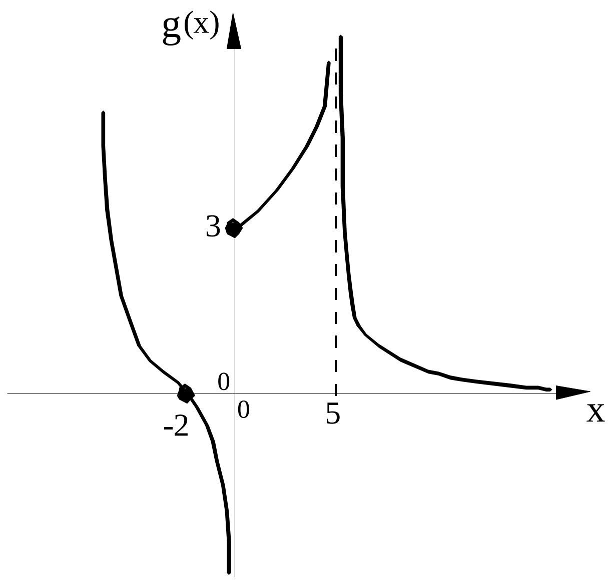
Quais os valores dos limites pedidos? *(siga apenas a indicação dos gráficos)*



$\lim_{x \to 2_+} f(x) =$ $\lim_{x \to 2_-} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

$\lim_{x \to 3_+} f(x) =$ $\lim_{x \to 3_-} f(x) =$ $\lim_{x \to 3} f(x) =$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$

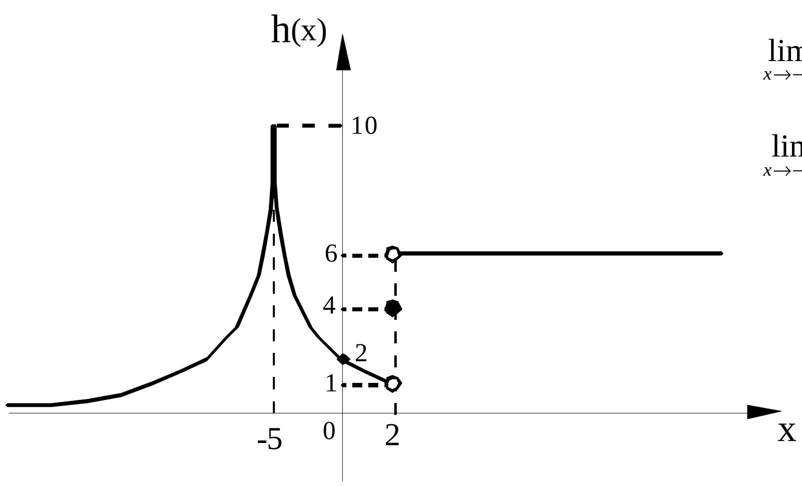


$\lim_{x \to -\infty} g(x) =$ $\lim_{x \to -2} g(x) =$

$\lim_{x \to 0_-} g(x) =$ $\lim_{x \to 0_+} g(x) =$

$\lim_{x \to 5_-} g(x) =$ $\lim_{x \to 5_+} g(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) =$



$\lim_{x \to -\infty} h(x) =$

$\lim_{x \to -5_-} h(x) =$ $\lim_{x \to -5_+} h(x) =$ $\lim_{x \to -5} h(x) =$

$\lim_{x \to 0} h(x) =$

$\lim_{x \to 2_-} h(x) =$ $\lim_{x \to 2_+} h(x) =$ $\lim_{x \to 2} h(x) =$

h(2) =

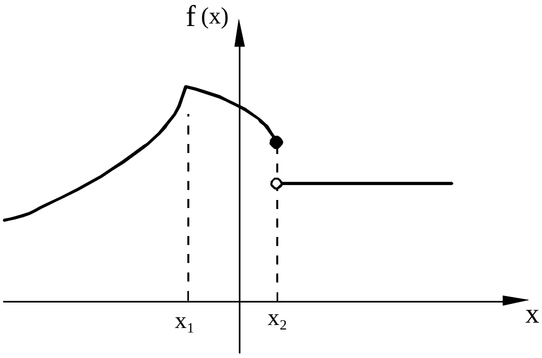
$\lim_{x \to 10} h(x) =$ $\lim_{x \to +\infty} h(x) =$

DIFERENCIABILIDADE

f(x) é <u>*diferenciável*</u> no ponto x_0 quando existe $f'(x_0)$.

(*o gráfico de f admite uma tangente no ponto x_0*)

<u>NOTE</u> que a diferenciabilidade implica em continuidade, mas o contrário não é verdadeiro.



Na figura ao lado, f(x) é diferenciável em todos os pontos, exceto x_1 e x_2.

f(x) é contínua em x_1, mas não é diferenciável nesse ponto.

f(x) não é contínua em x_2, muito menos diferenciável nesse ponto.

LINEARIDADE

Se f(x) = a.h(x) + b.g(x) , onde a e b são constantes (*não dependem de x*), então $f'(x) = a.h'(x) + b.g'(x)$.

Na notação de diferenciais, teremos $\frac{df}{dx} = a\frac{dh}{dx} + b\frac{dg}{dx}$.

A DERIVADA DE x^n

Se $f(x)=x^n \;\Rightarrow\; \frac{df}{dx} = nx^{n-1}$ (válido para todo $n \in \mathbf{R}$).

CASOS PARTICULARES IMPORTANTES:

$f(x) = K \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$

$f(x) = ax+b \;\Rightarrow\; f'(x) = a$

$f(x) = ax^2+bx+c \;\Rightarrow\; f'(x) = 2ax + b$

$f(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(K, a, b e c sendo constantes, independentes de x)

<u>Exercício 3</u>: Escreva a fórmula da derivada das funções:

(a) $f(x) = 3x-2$ (b) $f(x) = x^2-3x+2$ (c) $f(x)=x^3-4x^2+5x-3$

(d) $f(x) = \frac{5}{x}$ (e) $f(x) = \frac{6}{x^2} - \sqrt{x}$ (f) $f(x) = 5x^7 - 6x^6 + \sqrt[3]{x} - 8\sqrt{x} + 4$

<u>Exercício 4</u>: Um objeto se move sobre uma linha reta, de modo que a sua posição em função do tempo é dada por:

$$s(t)=\frac{t^2}{240}-\frac{t}{2}+20 \qquad \begin{cases} t \text{ em segundos} \\ s \text{ em metros} \end{cases}$$

(a) Qual sua posição nos instantes 0s, 20s, 1min, 2min e 2min20s ?

(b) Calcule a velocidade média $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ entre os instantes:

0 e 60s; 60s e 100s;
0 e 120s; 120s e 140s

(c) Escreva a fórmula para a velocidade instantânea $v(t)=\frac{ds}{dt}$ em função do tempo.

(d) Calcule a velocidade instantânea nos instantes 0, 20s, 1min, 2min e 2min20s.

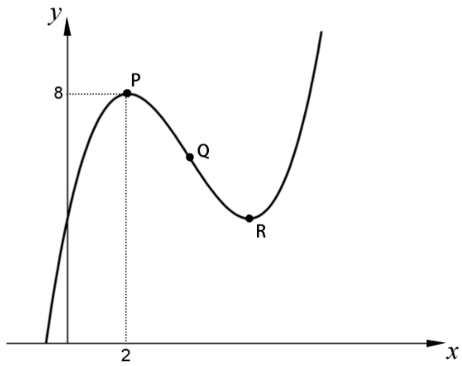
(e) Escreva e fórmula para a aceleração $a(t)=\frac{dv}{dt}$ em função do tempo.

(f) Qual a posição do corpo quando sua velocidade for de 2m/s?

<u>Exercício 5</u>: Repita o exercício anterior quando $s(t)=-\frac{t^2}{16}+\frac{15}{4}t+\frac{175}{4}$ $\begin{cases} t \text{ em segundos} \\ s \text{ em metros} \end{cases}$

<u>Exercício 6</u>: A cúbica $y = x^3 - 9x^2 + Ax + B$ tem o gráfico mostrado na figura ao lado.

(a) Encontre os valores de A e B de modo que o ponto de máximo local esteja em P(2,8).
(b) Com esses valores de A e B, encontre a posição R do mínimo local.
(c) Com esses valores de A e B, encontre a posição Q onde a função y(x) muda de concavidade (ponto de inflexão).



<u>Exercício 7</u>: Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo, marcando a posição das raízes e as coordenadas dos pontos de máximo e mínimo locais:

(a) $f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3-x$.
(b) $f(x) = x(x+1)(x+4) = x^3+5x^2+4x$.
(c) $f(x) = x(1-x)(x-5) = -x^3+6x^2-5x$.

<u>Exercício 8</u>: Uma antena de telefone celular de 50m está bem no topo de uma montanha de 400m de altura, cujo perfil é descrito pela parábola $h = 400 - x^2$. Uma formiga sobe a montanha, a partir do solo ($h = 0$). A que altura a formiga começa a enxergar a torre?
(retirado de http://ocw.mit.edu/OcwWeb/web/courses/courses/index.htm)

ALGUNS LIMITES BÁSICOS

Alguns limites importantes podem ser calculados apenas por inspeção ou efetuando uma fatoração simples.

<u>Exercício 9</u>: Determine os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2+3}{2x^2-3x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3+3}{2x+1}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{2x^2+1}$

(e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^2+x}$ (f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ (g) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3+1}$ (h) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ (i) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

Certos limites podem ser obtidos pela regra de L´Hôpital (que foi, na verdade, obtida por J.Bernoulli em 1694): Se f(x) e g(x) são diferenciáveis em um intervalo aberto (a,b) contendo c, e se f/g tem a forma indeterminada 0/0 ou ∞/∞ em c, então

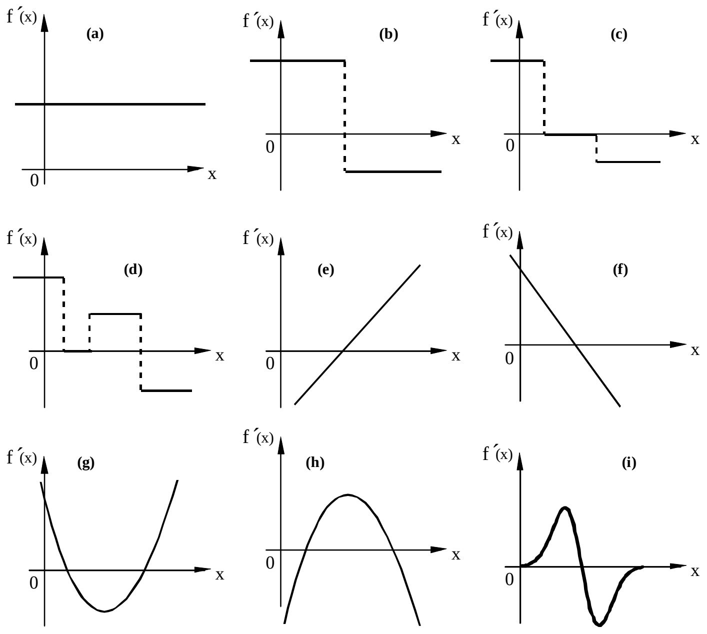
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

, contanto que esses limites existam.

<u>Exercício 10</u>: Calcule os limites do Exercício 8 pela regra de L´Hôpital.

<u>RESPOSTAS</u>

<u>Exercício 1</u>:



<u>Exercício 2</u>:

$\lim\limits_{x\to 2_+} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 2_-} f(x)=5$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\nexists$ $\lim\limits_{x\to 3_+} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 3_-} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0_-} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0_+} g(x)=3$ $\lim\limits_{x\to 5_-} g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 5_+} g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=0$ $\lim\limits_{x\to -5_-} h(x)=10$ $\lim\limits_{x\to -5_+} h(x)=10$ $\lim\limits_{x\to -5} h(x)=10$ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 2_-} h(x)=1$ $\lim\limits_{x\to 2_+} h(x)=6$ $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\nexists$ $h(2)=4$ $\lim\limits_{x\to 10} h(x)=6$ $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=6$

<u>Exercício 3</u>: (a) $f'(x)=3$ (b) $f'(x)=2x-3$ (c) $f'(x)=3x^2-8x+5$ (d) $f'(x)=-\frac{5}{x^2}$ (e) $f'(x)=-\frac{12}{x^3}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (f) $f'(x)=35x^6-36x^5+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{\sqrt{x}}$

<u>Exercício 4</u>: (a) 20m; 11,7m; 5m; 20m; 31,7m (b) −0,25m/s ; 0,167m/s; 0; 0,583m/s (c) $v(t)=\frac{t}{120}-\frac{1}{2}$ $\begin{cases}\text{t em segundos}\\ \text{v em m/s}\end{cases}$

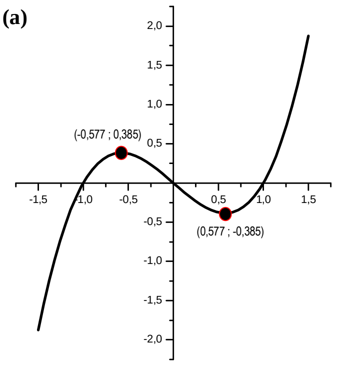
(d) 0,5m/s; −0,333m/s; 0; 0,5m/s; 0,667m/s (e) $a=\frac{1}{120}\,m/s^2$ (f) 245m

<u>Exercício 5</u>: (a) 43,75m; 93,75m; 43,75m; −406,25m; −656,25m (b) 0 ; −6,25m/s; −3,75m/s; −12,5m/s (c) $v(t)=-\frac{t}{8}+\frac{15}{4}$ $\begin{cases}\text{t em segundos}\\ \text{v em m/s}\end{cases}$

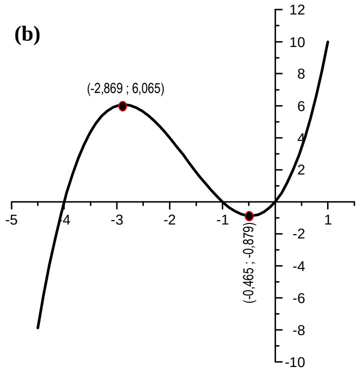
(d) 3,75m/s; 1,25m/s; −3,75m/s; −11,25m/s; −13,75m/s (e) $a=-\frac{1}{8}\,m/s^2$ (f) 84m

<u>Exercício 6</u>: (a) 24 e −12 (b) (4,4) (c) (3, 6)

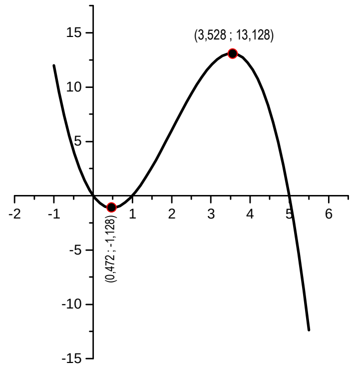
<u>Exercício 7</u>: **(a)**



(b)



(c)



<u>Exercício 8</u>: 350m

<u>Exercício 9</u>: (a) 2 (b) 2,5 (c) $-\infty$ (d) 0 (e) 1 (f) 2 (g) 1/3 (h) 2 (i) -1
