

**ATIVIDADES PRELIMINARES**

*Introdução às séries infinitas*

Observe a soma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$$

O que isso quer dizer?

Significa que devemos somar as frações, somar sempre, sem parar nunca?

Isso não faz sentido, certo? Simplesmente é impossível fazer um número infinito de coisas. Não há ninguém no mundo, nem nenhum computador, que consiga somar essa série até o infinito, simplesmente por que o infinito nunca chega.

Mas há uma interpretação válida e útil, e é essa que iremos usar.

Observe que, à medida que você soma mais frações, o resultado parece estabilizar (chegar cada vez mais próximo) de um valor - de um valor que nunca chega, mas ficamos cada vez mais próximos dele. Esse valor é chamado de limite da soma. O que queremos saber é o limite de S à medida que somamos mais termos.

**PROBLEMA 1:** Use a calculadora para estimar, com duas casas decimais, o limite da soma

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$$

Observe a alternância de sinal de um termo para outro. Você deve somar as frações até que não haja mais variação na segunda casa decimal.

*Resposta: 0,82*

**PROBLEMA 2:** Repita o problema anterior para a série

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

Você deve somar as frações até que não haja mais variação na segunda casa decimal.

*Resposta: 1,64*

Se você fez os problemas com cuidado, deve ter se surpreendido com a resposta do segundo. Para chegar a 1,64, você precisa somar bem mais termos do que parecia ser necessário...

A soma de séries infinitas (quer dizer, encontrar o limite da soma) é uma tarefa delicada e, quase sempre, difícil. Sem contar que, na maioria das vezes, esse limite nem existe. E o que é pior, não sabemos de antemão se o limite existe ou não (mais sobre isso na aula em sala).

Um exemplo famoso é a soma  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$ . Podemos encontrá-la facilmente, por dois processos.

Tome um segmento de tamanho 1. Divida o segmento em dois. Depois divida a segunda metade por dois. Divida o último quarto por dois, e assim por diante. Esse procedimento, escrito em frações, significa que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$$

Portando o valor de  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$  é 2.

Euler bolou uma maneira rápida de achar o limite de somas como essa. Note que, nesse tipo de soma, a fração seguinte é sempre igual à anterior multiplicada por  $\frac{1}{2}$ . Dizemos que  $S$  é uma *série geométrica* com razão  $\frac{1}{2}$ . Nesse caso, Euler procedeu assim:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots \right)$$

Então  $S = 1 + \frac{1}{2}S$ . Resolvendo esta equaçãozinha, achamos  $S = 2$ .

É claro que o método de Euler não funciona para outros tipos de série, como as que voce trabalhou nos problemas 1 e 2.

Uma palavrinha de ordem prática. Séries infinitas e limites só existem na teoria. Não dá para dividir um segmento de reta em dois sempre e sempre na prática, porque chegaremos num ponto perto dos átomos, e daí por diante nem sabemos como dividir coisas. Quando medimos algo na prática e calculamos coisas, sempre há um limite para o quanto pequenas as coisas podem ficar. Assim, somar coisas cada vez menores, numa sucessão infinita, é possível apenas na nossa imaginação. Qual a utilidade disso para um cálculo de Engenharia?

A utilidade das séries infinitas é devida exatamente a essa abstração de somar até o infinito: isso simplifica fórmulas e fornece técnicas de resolução de problemas práticos (tais como condução de calor, equalização de som, projeto de filtros, estudo de ondas e vibrações, etc.) que ficariam bem mais complicados de outro modo. É o mesmo problema de números irracionais, como  $\sqrt{2}$ . Na prática, sempre que medimos algo há uma precisão (resolução) máxima, e portanto poderíamos muito bem usar  $\frac{141}{100}$  ou, se necessário,  $\frac{7071}{5000}$  ou ainda uma fração mais precisa que essas. Mas isso torna as fórmulas mais complicadas e, o que é pior, esconde a geometria do problema.

Hoje em dia, aceitamos o infinito, mas usamos um critério para somar coisas apenas até chegar a um valor suficientemente correto do limite verdadeiro. Com um pouco de sorte, e usando alguma matemática, até podemos descobrir o valor correto do limite sem fazer a soma.

**PROBLEMA 3:** Use o método de Euler para encontrar as somas:

(a)  $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

Resposta: 1,5

(b)  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$

Resposta: 2/3

**PROBLEMA 4:** Euler (que não tinha vergonha nem medo algum de errar) usou seu método para calcular  $S = 1+2+4+8+16+32+64+\dots$ .  
Que resultado encontrou? O que voce acha disso?

© 2006-14 Mauricio Fabbr  
MCT/INPE: <http://www.las.inpe.br/~fabbr>  
Universidade São Francisco - USF  
Itatiba/Campinas - <http://www.saofrancisco.edu.br>  
São Paulo - Brazil  
Permitido uso livre para fins educacionais,  
sem ônus, desde que seja citada a fonte.