<u>CÁLCULO AVANÇADO</u>

2º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

<u>ROTEIRO PARA ANÁLISE DE SÉRIES NUMÉRICAS INFINITAS</u>

1. Para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ seja convergente, é necessário *(mas não suficiente !)* que o termo geral tenda a zero, isto é, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Exemplo 1</u> : a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots$ diverge, porque o termo geral tende a 1.

<u>Exemplo 2</u> : o termo geral da série $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ tende a zero. Isto não é suficiente para afirmar que S converge. (na verdade, S é a famosa série harmônica, que sabidamente diverge).

<u>Exemplo 3</u> : o termo geral da série $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ tende a zero. Mas apenas essa informação não permite concluir se P converge ou diverge. (pode-se provar que P converge para ln2).

2. Séries alternadas estritamente decrescentes (isto é, $|a_i| < |a_j|$ se i > j), convergem se o termo geral tender a zero. Nesse caso, o erro de truncamento é menor que o primeiro termo que foi desprezado.

<u>Exemplo 4</u> : a série $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ converge, uma vez que é alternada e o termo geral tende a zero.

Seja P_k a soma dos k primeiros termos de *P*. Temos:

$P_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}833\ldots$ Como o quarto termo de *P* é 1/4 = 0,25 , podemos afirmar que *P* = 0,833... ± 0,25 .

P_7 = 0,75952... Como o oitavo termo de *P* é 1/8 = 0,125, podemos afirmar que *P* = 0,7595... ± 0,125 .

As séries alternadas são bastante convenientes em problemas práticos de engenharia, uma vez que é possível calcular facilmente o erro de truncamento.

3. A série $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ é chamada de <u>*série harmônica*</u>, e sabidamente <u>diverge</u>.

(uma demonstração simples e instrutiva disso foi feita por Oresme na idade média)

A série harmônica generalizada $S_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

<u>Exemplo 5</u> : a série $Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ diverge, pois é uma série harmônica generalizada com *p* = ½.

<u>Exemplo 6</u> : a série $R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$ converge, pois é uma série harmônica generalizada com *p* = 2.

O valor de S_p pode ser encontrado em tabelas ou através de algoritmos numéricos sofisticados.
Por exemplo, $S_2 = \pi^2/6$ e S_3 = 1,05179979026464499972...

Se *p* for um número complexo, S_p é conhecida como função Zeta de Riemann, ζ(*p*).

4. A série geométrica $a_1 + qa_1 + q^2 a_1 + \ldots$ converge para $\frac{a_1}{1-q}$ se |q| < 1 e diverge se |q| ≥ 1.

<u>Exemplo 7</u> : a série $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ converge para 2, pois é uma série geométrica com razão ½ .

<u>Exemplo 8</u> : a série $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^i} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ converge para 0,75, pois é uma série geométrica com razão –1/3 .

5. A soma de algumas séries envolvendo frações pode ser encontrada pela técnica da expansão em frações parciais, ilustrada no exemplo abaixo.

Exemplo 9 : considere a série $S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1).(n+1)}=\frac{2}{1.3}+\frac{3}{2.4}+\frac{4}{3.5}+...$

Notando que $\frac{n}{(n-1).(n+1)}=\frac{1/2}{n-1}-\frac{1/2}{n+1}$, basta trabalhar com as somatórias e índices para encontrar o valor de S :

$$S=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\right\}=\frac{3}{4}$$

6. (*O critério da razão*) Seja $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Se L < 1, a série é absolutamente convergente.
Se L > 1, a série é divergente.
Se L = 1, nada se pode afirmar.

Exemplo 10 : Considere $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}+1+\frac{9}{8}+1+\frac{25}{32}+...$

Teremos $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$. Então $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$, e portanto a série converge.

7. O erro de truncamento de uma série convergente com termos positivos e decrescentes pode ser calculado pelo critério da integral:

Se $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, usando a soma parcial $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$ o erro cometido será $\varepsilon=|S-S_N|<\int_N^{\infty}f(x)dx$, onde definimos $f(n)=a_n$ valendo para todo n real.

Exemplo 11 : Considere $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$. Para somar essa série com precisão de 0,01, escolhemos N de modo que

$$\int_N^{\infty}\frac{1}{x^2}dx<0{,}01\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{1}{x}\right|_{\infty}^{N}<0{,}01\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{N}>0{,}01\quad\Rightarrow\quad N>100$$

8. Se nenhum dos critérios acima funcionar, é preciso empregar técnicas ou tabelas mais sofisticadas (veja por exemplo os livros indicados abaixo, ou procure resultados na Internet ou, ainda, utilize programas profissionais de manipulação matemática e cálculo numérico). Séries infinitas não podem ser somadas no computador – que sempre fornece uma soma parcial da série. Nesse caso, pode ser difícil estimar o erro de truncamento (uma soma parcial sempre dá um resultado finito, mesmo que a série não seja convergente). O ideal para problemas práticos é ter um resultado na forma de uma série alternada, porque nesse caso o erro de truncamento pode ser calculado facilmente.

REFERENCIAS

1. Swokowski, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed., volume 2. São Paulo: Makron, 1995. 2 v.
2. Kaplan, W. **Cálculo avançado**. São Paulo: E. Blücher, 1972-1987. 2 v.
3. Boulos, P. e Abud, Z.I. **Cálculo diferencial e integral** , volume 2. São Paulo: Makron, 2000.
4. Spiegel, M.R., **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. Coleção Scham, São Paulo, McGraw Hill, 1977 ou mais recente.
5. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., ed. **Handbook of Mathematical Functions**. NY, Dover, 1965 ou mais recente.
6. Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. and Jeffrey, A.J.(ed.), **Table of Integrals, Series and Products**. NY, Academic Press, 1994.